261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I - Loi d'une variable aléatoire

1. Définitions

a. Préliminaires théoriques

Définition 1. Soient $(E, \mathscr{F})$ un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire** toute fonction $X : \Omega \to E$ mesurable. On appelle **loi** de X la mesure image de $\mathbb{P}$ par X, définie par

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \to & [0,1] \\ F & \mapsto & \mathbb{P}(X^{-1}(F)) \end{array}$$

[GOU21] p. 334

Notation 2. Pour alléger les notations, on écrira $\{X \in F\}$ pour désigner l'ensemble $X^{-1}(F)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X^{-1}(F))$ devient $\mathbb{P}(X \in F)$. De même, $\{X = x\}$ désigne l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$, $\{X \leq a\}$ désigne l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, a])$ (dans le cas réel), etc.

Exemple 3. On se place dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$ et on considère la fonction réelle $X : \omega \mapsto \omega$. Alors, X est une variable aléatoire, dont la loi est $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}$.

[G-K] p. 118

Définition 4. Une variable aléatoire X est dite **réelle** si son espace d'arrivée est $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

[GOU21] p. 334

b. Lois discrètes

Définition 5.
- On dit qu'une loi μ est **discrète** s'il existe un ensemble D fini tel que $\mu(D) = 1$.
- On dit que la variable aléatoire X est discrète si sa loi $\mathbb{P}_X$ est discrète.

[G-K] p. 335

Remarque 6. Cela revient à dire que $X(\Omega)$ est fini ou est dénombrable.

[GOU21] p. 335

Exemple 7. On pose $\Omega = \{(\omega_n) \in \mathbb{R}^n \mid \omega_n \in \{0,1\} \, \forall n \in \mathbb{N}\}$ et $X : (\omega_n) \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n = 0\}$. Alors X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

[G-K] p. 131

Proposition 8. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable D, alors :

(i) $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(A) = \sum_{i \in D \cap A} \mathbb{P}(X = i)$.

(ii) $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} \mathbb{P}(X = i)\delta_i$ où les δ_i sont des masses de Dirac (voir Exemple 9 Exemple 9).

p. 137

Exemple 9. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Voici quelques exemples de lois discrètes classiques.

— Si $x \in \Omega$, on pose $\delta_x : A \mapsto \mathbb{1}_A(x)$. C'est une loi discrète sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

— Soit $E \subseteq \Omega$ fini. On appelle loi uniforme sur E la loi discrète définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [\![0,1]\!] \\ A & \mapsto & \frac{|A \cap E|}{|E|} \end{array}$$

— X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathscr{B}(p)$, si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Dans ce cas, X est bien une loi discrète et on a

$$\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$$

— X suit une loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathscr{B}(n,p)$, si X est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètre p. Dans ce cas, X est bien une loi discrète et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

— X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$, notée $\mathscr{G}(p)$, si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

— X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathscr{P}(\lambda)$, si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

c. Lois à densité

p. 134

Définition 10. On dit qu'une loi réelle μ est **à densité** s'il existe une fonction mesurable f telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$$

Proposition 11. Soit X une variable aléatoire de densité f.

(i) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a \leq X) = \mathbb{P}(a < X) = \int_{[a,+\infty[} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{]a,+\infty[} f \,\mathrm{d}\lambda$$

et

$$\mathbb{P}(a \geq X) = \mathbb{P}(a > X) = \int_{]-\infty,a]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{]-\infty,a[} f \,\mathrm{d}\lambda$$

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = 1$$

p. 141

Exemple 12. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Voici quelques exemples de lois à densité classiques.

— X suit une loi uniforme sur un compact K de $\mathbb{R}$ si elle admet la densité

$$x \longmapsto \frac{1}{\lambda(K)} \mathbb{1}_K(x)$$

— X suit une loi gaussienne de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet la densité

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

— X suit une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, notée $\mathcal{E}(a)$ si elle admet la densité

$$x \longmapsto a e^{-ax} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

— X suit une loi Gamma de paramètres $a, \gamma > 0$, notée $\Gamma(a, \gamma)$ si elle admet la densité

$$x \mapsto \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(x)$$

où $\Gamma(a)$ est la valeur au point a de la fonction Γ d'Euler.

Théorème 13. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g. Alors, $X+Y$ admet comme densité la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$. p. 179

2. Espérance

Définition 14. — On note $\mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ (ou simplement $\mathscr{L}_1(\Omega)$ voire $\mathscr{L}_1$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'espace des variables aléatoires intégrables sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. p. 159

— Si $X \in \mathscr{L}_1$, on peut définir son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Théorème 15 (Transfert)**.** Si X est une variable aléatoire dont la loi $\mathbb{P}_X$ admet une densité f par rapport à $\mathbb{P}$ et si g est une fonction mesurable, alors p. 164

$$g(X) \in \mathscr{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |g(x)| f(x)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x)$$

Corollaire 16. Soit g une fonction mesurable. Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = D$, alors

$$g(X) \in \mathscr{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |g(i)| \mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in D} g(i) \mathbb{P}(X = i)$$

Remarque 17. En reprenant les notations précédentes, et avec $g : x \mapsto x$, on a

$$X \in \mathscr{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |i| \mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in D} i\mathbb{P}(X = i)$$

Corollaire 18. Soit g une fonction mesurable. Si X est une variable aléatoire admettant f comme densité, alors

$$g(X) \in \mathscr{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |g| f \, \mathrm{d}\lambda < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} |g| f \, \mathrm{d}\lambda$$

Remarque 19. En reprenant les notations précédentes, et avec $g : x \mapsto x$, on a

$$X \in \mathscr{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \, \mathrm{d}x$$

Exemple 20. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. p. 187

— $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

— $X \sim \mathscr{B}(n, p) \implies \mathbb{E}(X) = np$.

— $X \sim \mathscr{G}(p) \implies \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

— $X \sim \mathscr{P}(\lambda) \implies \mathbb{E}(X) = \lambda$.

3. Indépendance

Définition 21. Soient $(E, \mathscr{F})$ un espace probabilisable. On dit que deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E$ sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes ie. p. 126

$$\forall A, B \in \mathscr{F}, \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \in B\}) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_X(B)$$

Proposition 22. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions mesurables f et g.

Théorème 23. Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

Corollaire 24. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors, $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

II - Caractérisation de la loi par des fonctions

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

1. Fonctions de répartition

Définition 25. On appelle **fonction de répartition** de X, notée F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par p. 118

$$\forall (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d,\ F_X(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_d)$$

où l'on a noté $X = (X_1, \dots, X_d)$.

Exemple 26. Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors p. 143

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = 1 - e^{\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Théorème 27. Si deux variables (ou vecteurs) aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont même loi. p. 118

Théorème 28. (i) F_X est à valeurs dans $[0, 1]$.

(ii) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

(iv) En tout point x de $\mathbb{R}$, F_X est continue à droite et admet une limite à gauche, qui vaut $F_X(x)$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

(v) L'ensemble des points de discontinuité de F est fini ou dénombrable.

Théorème 29. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$. Alors, il existe une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont F est la fonction de répartition.

2. Fonctions caractéristiques

Définition 30. On appelle **fonction caractéristique** de X la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^d$ par p. 239

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{i\langle t,X\rangle}\right)$$

Exemple 31. Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors [AMR08] p. 156

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{-\frac{(xt)^2}{2}}$$

Théorème 32. Si deux variables (ou vecteurs) aléatoires ont la même fonction caractéristique, alors elles ont même loi. [G-K] p. 239

Théorème 33. (i) $\phi_X(0) = 1$.
(ii) $|\phi_X| \leq 1$.
(iii) ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 34. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathscr{L}_1$. Alors,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 35. Si deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y$.

Théorème 36. Si X admet un moment d'ordre N (ie. $\mathbb{E}(\|X\|^N)) < +\infty$), alors ϕ_X est $\mathscr{C}^N$ et, si $d = 1$,

$$\forall k \in [\![1,N]\!], \phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$$

Exemple 37. Si X admet un moment d'ordre 2 et est centrée avec une variance σ^2, on a alors

$$\phi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$$

quand t tend vers 0.

3. Fonctions génératrices

On suppose dans cette sous-section que X est à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Définition 38. On appelle **fonction génératrice** de X la fonction p. 235

$$G_X : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k \end{array}$$

Remarque 39. p. 246

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = G_X(e^{it})$$

Exemple 40. p. 236

— $X \sim \mathscr{B}(p) \implies \forall s \in [-1,1], G_X(s) = (1-p) + ps$.

— $X \sim \mathscr{B}(n,p) \implies \forall s \in [-1,1], G_X(s) = ((1-p) + ps)^n$.

— $X \sim \mathscr{G}(p) \implies \forall s \in [-1,1], G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$.

— $X \sim \mathscr{P}(\lambda) \implies \forall s \in [-1,1], G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$.

Proposition 41. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors,

$$G_{X_1 X_2} = G_{X_1} + G_{X_2}$$

Théorème 42. Sur $[0,1]$, la fonction G_X est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n})$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

ce qui montre que la fonction génératrice caractérise la loi.

Exemple 43. Si $X_1 \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $X_2 \sim \mathscr{B}(m,p)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathscr{B}(n+m,p)$. [GOU21] p. 346

Théorème 44. $X \in \mathscr{L}_1$ si et seulement si G_X admet une dérivée à gauche en 1. Dans ce cas, $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$. [G-K] p. 238

III - Convergence en loi

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 45. On dit que (X_n) **converge en loi** vers $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ si p. 295

$$\forall f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(X))$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Exemple 46. Si $\forall n \geq 1$, X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$, alors $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0,1]$. p. 313

Proposition 47. Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$, alors : p. 295

(i) La limite X est unique.

(ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, Y \rangle$.

Plus généralement, si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans E, alors $f(X_n) \xrightarrow{(d)} f(X)$ pour toute f fonction définie et continue sur E.

Théorème 48 (Lemme de Scheffé)**.** On suppose :

— $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.

— $\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega X_n \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$.

Alors, $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$.

Corollaire 49. On suppose :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une densité f_n.

— (f_n) converge presque partout vers une fonction f.

— Il existe une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Alors, $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Corollaire 50. Si X et X_n sont des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable D pour tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant

$$\forall k \in D, \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Application 51. Soit, pour $n \geq 1$, une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p_n. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème 52. En notant F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, on a, p. 302

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff F_{X_n}(x) \longrightarrow_{n \to +\infty} F_X(x)$$

en tout point x où F_X est continue.

Théorème 53. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire.

(i) Si (X_n) converge en probabilité vers X, alors (X_n) converge en loi vers X.

(ii) Si (X_n) converge en loi vers une constante a (ou de manière équivalente, vers une masse de Dirac δ_a), alors (X_n) converge en probabilité vers a.

Contre-exemple 54. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$, alors (X_n) converge en loi vers $\mathcal{B}(2p(1-p))$, mais pas en probabilité. [HAU] p. 362

2. Théorème central limite et applications

Théorème 55 (Slutsky)**.** Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} c$ où c est un vecteur constant, alors : [G-K] p. 305

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c$.

(ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, c \rangle$.

Théorème 56 (Lévy)**.** On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles et X [Z-Q] p. 544

une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[DEV]

Théorème 57 (Central limite)**.** On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$. Alors, [G-K] p. 307

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Application 58 (Théorème de Moivre-Laplace)**.** On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Lemme 59. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$. p. 180

Application 60 (Formule de Stirling)**.** p. 556

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

[DEV]

Application 61 (Théorème des événements rares de Poisson)**.** Soit $(N_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout n, $A_{n,N_1}, \dots, A_{n,N_n}$ sont des événements indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,N_k}) = p_{n,k}$. On suppose également que : p. 390

(i) $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda > 0$ où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in[\![1,N_n]\!]} p_{n,k} = 0$.

Alors, la suite de variables aléatoires (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Les Contre-Exemples en Mathématiques **[HAU]**

Bertrand Hauchecorne. *Les Contre-Exemples en Mathématiques.* 2e éd. Ellipses, 13 juin 2007.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude Zuily et Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.