239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I - Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \times X \to \mathbb{C}$ où (E, d) est un espace métrique. On pose $F : t \mapsto \int_X f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

1. Continuité

[Z-Q] p. 312

Théorème 1 (Continuité sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$.

(iii) $\exists g \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x \in X$$

Alors F est continue en t_0.

Corollaire 2. On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E.

(iii) $\forall K \subseteq E$, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x$$

Alors F est continue sur E.

p. 318

Exemple 3. La fonction

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ t & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

[G-K] p. 104

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ intégrable. Alors,

$$\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Dérivabilité

On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. [Z-Q] p. 313

Théorème 5 (Dérivation sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial f}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_K(x) \quad \forall t \in I, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I$, $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in L_1(X)$ et F est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I,\ F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Remarque 6. — Si dans le Théorème 5, hypothèse (i), on remplace "dérivable" par "$\mathscr{C}^1$", alors la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$.

— On a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Théorème 7 (k-ième dérivée sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \longmapsto f(t,x) \in \mathscr{C}^k(I)$. On notera $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f$ la j-ième dérivée définie presque partout pour $j \in [\![0,k]\!]$.

(iii) $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_{j,K} \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\right| \leq g_{j,K}(x) \quad \forall t \in K, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall t \in I$, $x \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t) \in L_1(X)$ et $F \in \mathscr{C}^k(I)$ avec

$$\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall t \in I,\ F^{(j)}(t) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Exemple 8. La fonction Γ de l'Exemple 3 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$. p. 318

[ROM19-1] p. 364

Lemme 9. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

[DEV]

Théorème 10 (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Lemme 9. Alors $f = \Gamma$.

[B-P] p. 149

Exemple 11. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card})$ et on considère (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| + \sup_{x \in I} |f_n'(t)| < +\infty$$

Alors $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n'(x)$.

[GOU20] p. 169

Application 12 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** En résolvant une équation différentielle linéaire, on a

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-itx} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{\pi \alpha}}$$

[DEV]

[G-K] p. 107

Application 13 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \, dt$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$.

3. Holomorphie

On suppose ici que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

[Z-Q] p. 314

Théorème 14 (Holomorphie sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω. On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|f(x,z)\right| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}\mu(z)$$

Exemple 15. La fonction Γ de l'Exemple 3 est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. p. 318

II - Produit de convolution

1. Notion de convolée de deux fonctions

Définition 16. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de f et g en $x \in \mathbb{R}$ **existe** si la fonction [AMR08] p. 75

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 17. Dans $L_1(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution est commutatif, bilinéaire et associatif.

Théorème 18. Soient $p, q > 0$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$.

(i) Si $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(f*g)(x)$ existe <u>pour tout</u> $x \in \mathbb{R}^d$ et est uniformément continue. On a, $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ et, si $p \neq 1, +\infty$, $f*g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

(ii) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, alors $(f*g)(x)$ existe <u>pour tout</u> $x \in \mathbb{R}^d$ et $f*g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.

(iii) Si $p = 1$ et $q \in [1, +\infty[$, alors $(f*g)(x)$ existe <u>pp.</u> en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f*g \in L_q(\mathbb{R})$ telle que $\|f*g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$.

(iv) Si $p = 1$ et $q = 1$, alors $(f*g)(x)$ existe <u>pp.</u> en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f*g \in L_1(\mathbb{R})$ telle que $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exemple 19. Soient $a < b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}\right)(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 20. $L_1(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. p. 85

Remarque 21. Cette algèbre n'a pas d'élément neutre. Afin de pallier à ce manque, nous allons voir la notion d'approximation de l'identité dans la sous-section suivante.

2. Approximation de l'identité

Définition 22. On appelle **approximation de l'identité** toute suite (ρ_n) de fonctions mesurables de $L_1(\mathbb{R}^d)$ telles que [B-P] p. 306

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n \, \mathrm{d}\lambda_d = 1$.

(ii) $\sup_{n \geq 1} \|\rho_n\| < +\infty$.

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0,\epsilon)} \rho_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$.

Remarque 23. Dans la définition précédente, (ii) implique (i) lorsque les fonctions ρ_n sont positives. Plutôt que des suites, on pourra considérer les familles indexées par $\mathbb{R}_*^+$.

Exemple 24.

— Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0,\ \rho_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$$

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0,\ \rho_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$$

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0,\ \rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}$$

Application 25 (Théorème de Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$. [GOU20] p. 304

[B-P] p. 307

Théorème 26. Soit (ρ_n) une approximation de l'identité. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\forall n \geq 1, f * \rho_n \in L_p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \rho_n - f\|_p \longrightarrow 0$$

Théorème 27. Soient (ρ_n) une approximation de l'identité et $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors :

— Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors $(f * \rho_n)(x_0) \longrightarrow_{n \to +\infty} f(x_0)$.

— Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\|f * \rho_n - f\|_\infty \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$.

— Si f est continue sur un compact K, alors $\sup_{x \in K} |(f * \rho_n)(x) - f(x)| \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$.

Définition 28. On qualifie de **régularisante** toute suite (α_n) d'approximations de l'identité telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 29. Soit $\alpha \in \mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ une densité de probabilité. Alors la suite (α_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n : x \mapsto n\alpha(nx)$ est régularisante. p. 274

Application 30. (i) $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d)$ pour $\|.\|_\infty$. [AMR08] p. 96

(ii) $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L_p(\mathbb{R}^d)$ pour $\|.\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

III - Transformée de Fourier

1. Sur $L_1(\mathbb{R}^d)$

Définition 31. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée $\hat{f}$ par p. 109

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, \mathrm{d}x \end{array}$$

Lemme 32 (Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ existe et

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \hat{f}(\xi)$$

Théorème 33. $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$. Donc la transformation de

Fourier

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

Corollaire 34. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

Exemple 35 (Densité de Poisson)**.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Alors $p \in L_1(\mathbb{R})$ et, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Exemple 36.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin(\xi)}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0 \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarquons ici que la transformée de Fourier n'est pas intégrable.

Proposition 37. p. 114

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$$

Théorème 38 (Formule de dualité)**.**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\widehat{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 39. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application injective.

Application 40. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que [BMP] p. 140

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Théorème 41 (Formule d'inversion de Fourier)**.** Si $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors [AMR08] p. 116

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

Proposition 42. Soient $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f} * \widehat{g}$$

2. Sur $L_2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 43 (Plancherel-Parseval)**.**

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d),\ \|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

Théorème 44. Soit $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Alors :

(i) Il existe une suite (f_n) de $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour une telle suite (f_n), la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L_2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 45. La limite $\tilde{f}$ est la **transformée de Fourier** de f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 46. Les transformations de Fourier $L_1(\mathbb{R}^d)$ et $L_2(\mathbb{R}^d)$ coïncident sur $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

3. Application en probabilités

Définition 47. Soit X un vecteur aléatoire. On appelle **fonction caractéristique** de X, notée ϕ_X, la transformée de Fourier de la loi $\mathbb{P}_X$ (définie à un signe près) : **[G-K]** p. 239

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t,x\rangle})$$

Théorème 48. Soient X et Y deux vecteurs aléatoires. Alors,

$$\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

Corollaire 49. Soient X et Y deux vecteurs aléatoires tels que $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $\langle X, a\rangle$ et $\langle Y, a\rangle$ ont même loi. Alors, X et Y ont même loi.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels [AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

Objectif agrégation [BMP]

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Analyse [B-P]

Marc BRIANE et Gilles PAGES. *Analyse. Théorie de l'intégration*. 8e éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration.

De l'intégration aux probabilités [G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête [GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Éléments d'analyse réelle [ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Analyse pour l'agrégation [Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.