234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

On se place dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on munit de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{K})$.

I - L'intégrale de Lebesgue

1. Définition abstraite

Définition 1. Soit f une fonction étagée positive sur $(X, \mathscr{A})$. **L'intégrale** de f sur X par rapport à la mesure μ est définie par [B-P] p. 120

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

Proposition 2. Soit f une fonction étagée. Pour toute décomposition de la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ (où $(A_i)_{i \in I}$ désigne une partition $\mathscr{A}$-mesurable finie de X), on a :

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$$

Exemple 3. Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

— On se place dans le cas où $\mu = \delta_a$, la mesure de Dirac en un point $a \in X$. Alors,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = f(a)$$

— On se place dans le cas où $\mu = m$, la mesure de comptage sur $(X, \mathscr{P}(X))$. Alors,

$$\int_X f \,\mathrm{d}m = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha |\{f = \alpha\}|$$

Définition 4. Soit f une fonction mesurable positive (finie ou non) sur $(X, \mathscr{A})$. On pose

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \mid \varphi \text{ étagée positive telle que } \varphi \leq f\right\}$$

on dit que f est **μ-intégrable** si $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

2. Propriétés

Théorème 5 (Convergence monotone)**.** Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors, la limite f de cette suite est mesurable positive, et,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Corollaire 6. Soient f, g deux fonctions mesurables positives.

(i) $f \leq g \implies \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est croissante).

(ii) $\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est additive).

(iii) $\forall \lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est positivement homogène).

(iv) Si $f = g$ pp., alors $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Au vu de la linéarité de l'intégrale, on peut maintenant donner la définition suivante.

Définition 7. Soit $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable. p. 128

— f est dite **μ-intégrable** si $|f|$ est μ-intégrable.

— Dans ce cas, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en notant f^+ et f^- les parties positives et négatives de f, on définit

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en reprenant le point précédent, on définit

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 8. Soit $f : X \to \mathbb{K}$ intégrable. Alors,

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

avec égalité,

— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si f est de signe constant pp.

— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si $f = \alpha |f|$ pp. pour $\alpha \in C(0,1)$.

3. Lien avec l'intégrale de Riemann

Proposition 9. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

(i) Il existe une fonction g λ-intégrable sur $[a, b]$ telle que $f = g$ pp. De plus,

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda$$

(ii) En particulier, si f est borélienne,

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda$$

Contre-exemple 10. La réciproque est fausse. Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est intégrable au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann.

II - Construction des espaces L_p

1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}_1$

Définition 11. On note

$$\mathscr{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ est } \mu\text{-intégrable}\}$$

l'ensemble des fonctions μ-intégrables. En l'absence d'ambiguïté, on notera simplement $\mathscr{L}_1(\mu)$ ou $\mathscr{L}_1$. Cette définition s'étend aux ensembles de fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\overline{\mathbb{R}}$, etc.

Exemple 12. Si μ est la mesure de comptage sur $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N})$, alors

$$\mathscr{L}_1 = \ell_1 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{n \geq 0} |u_n| < +\infty \right\}$$

Théorème 13. (i) $f \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire positive (au sens où $f \geq 0 \implies \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$) et croissante sur $\mathscr{L}_1$.

(ii) $\mathscr{L}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(iii) $\|.\|_1 : f \mapsto \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}_1$.

p. 137

Théorème 14 (Lemme de Fatou)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors,

$$0 \leq \int_X \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq +\infty$$

Exemple 15. Soit f croissante sur $[0,1]$, continue en 0 et dérivable en 1 et dérivable pp. dans $[0,1]$. Alors,

$$\int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}x \leq f(1) - f(0)$$

Théorème 16 (Convergence dominée)**.** Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{L}_1$ telle que :

(i) pp. en x, $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $f(x)$.

(ii) $\exists g \in \mathscr{L}_1$ positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pp. en } x, \, |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$$

Exemple 17.
— On reprend l'Exemple 15 et on suppose f partout dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors l'inégalité est une égalité.
— Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \geq 1$, $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Application 18 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit (A_n) une famille de parties de $\mathscr{A}$. Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = 0$$

2. Les espaces vectoriels $\mathscr{L}_p$

Définition 19. Pour tout réel $p > 0$, on définit p. 163

$$\mathscr{L}_p(X, \mathscr{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid |f|^p \in \mathscr{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)\}$$

on a les mêmes remarques qu'à la Définition 11.

Proposition 20. $\mathscr{L}_p$ est un espace vectoriel.

Proposition 21. (i) Si $\mu(X) < +\infty$, alors

$$0 < p \leq q \implies \mathscr{L}_q \subseteq \mathscr{L}_p$$

(ii) Si $\mu = m$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors

$$0 < p \leq q \implies \underbrace{\mathscr{L}_p(m)}_{\ell_p} \subseteq \underbrace{\mathscr{L}_q(m)}_{\ell_q}$$

Définition 22. Pour tout $p > 0$, on définit

$$\|.\|_p : f \mapsto \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 23 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathscr{L}_p$ et $g \in \mathscr{L}_q$. Alors $fg \in \mathscr{L}_1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Théorème 24 (Inégalité de Minkowski)**.**

$$\forall f, g \in \mathscr{L}_p, \, \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

3. Les espaces vectoriels normés L_p

Définition 25. On définit pour tout $p > 0$, p. 171

$$L_p = \mathscr{L}_p / V$$

où $V = \{v \in \mathscr{L}_p \mid v = 0 \text{ pp.}\}$.

Théorème 26. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(L_p), \|.\|_p$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 27 (Riesz-Fischer)**.** Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L_p est complet pour la norme $\|.\|_p$.

Théorème 28. Soit (f_n) une suite d'éléments de L_p qui converge vers f pour la norme $\|.\|_p$. Alors, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge pp. vers f.

Proposition 29. Pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L_p. p. 176

Théorème 30. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Alors :

(i) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L_p pour tout $p \in [1,+\infty[$.

(ii) L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L_p pour tout $p \in [1,+\infty[$.

4. L'espace L_∞

Définition 31. p. 180

— Soit $f : X \to \mathbb{K}$. On définit $\|f\|_\infty$ comme le supremum essentiel de la fonction $|f|$ et $\mathscr{L}_\infty(\mu)$ (noté $\mathscr{L}_\infty$ en l'absence d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions μ-essentiellement bornées.

— On définit

$$L_\infty = \mathscr{L}_\infty / V$$

où $V = \{v \in \mathscr{L}_\infty \mid v = 0 \text{ pp.}\}$.

Théorème 32. L_∞, muni de $\|.\|_\infty$, est un espace vectoriel normé complet.

Remarque 33. L'inégalité de Hölder est encore vraie pour $q = +\infty$.

III - Grands théorèmes d'intégration

1. Régularité sous l'intégrale

Soit $f : E \times X \to \mathbb{C}$ où (E, d) est un espace métrique. On pose $F : t \mapsto \int_X f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x)$. **[Z-Q]** p. 312

a. Continuité

Théorème 34 (Continuité sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$.

(iii) $\exists g \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x \in X$$

Alors F est continue en t_0.

Corollaire 35. On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E.

(iii) $\forall K \subseteq E$, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x$$

Alors F est continue sur E.

Exemple 36. La fonction p. 318

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+_* & \rightarrow & \mathbb{R}^+_* \\ t & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+_*$.

Exemple 37. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors, [G-K] p. 104

$$\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) \, \mathrm{d}t$$

est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b. Dérivabilité

On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. [Z-Q] p. 313

Théorème 38 (Dérivation sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial f}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g_K(x) \quad \forall t \in I, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in L_1(X)$ et F est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Remarque 39. — Si dans le Théorème 38, hypothèse (i), on remplace “dérivable” par “$\mathscr{C}^1$”, alors la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$.

— On a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Théorème 40 (k-ième dérivée sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x) \in \mathscr{C}^k(I)$. On notera $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f$ la j-ième dérivée définie presque partout pour $j \in [\![0,k]\!]$.

(iii) $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_{j,K} \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\right| \leq g_{j,K}(x) \quad \forall t \in K, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall t \in I$, $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t) \in L_1(X)$ et $F \in \mathscr{C}^k(I)$ avec

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall t \in I, F^{(j)}(t) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Exemple 41. La fonction Γ de l'Exemple 36 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$. p. 318

Exemple 42. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card})$ et on considère (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I telle que [B-P] p. 149

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| + \sup_{x \in I} |f_n'(t)| < +\infty$$

Alors $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n'(x)$.

Application 43 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** En résolvant une équation différentielle linéaire, on a [GOU20] p. 169

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-itx}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{\pi\alpha}}$$

[G-K] p. 107

Application 44 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

c. Holomorphie

On suppose ici que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Théorème 45 (Holomorphie sous le signe intégral)**.** On suppose : [Z-Q] p. 314

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω. On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(x,z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \, \mathrm{d}\mu(z)$$

Exemple 46. La fonction Γ de l'Exemple 36 est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. p. 318

2. Intégration sur un espace produit

Théorème 47 (Fubini-Tonelli)**.** Soient $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un autre espace mesuré et $f : (X \times Y) \to \overline{\mathbb{R}^+}$. [B-P] p. 237
On suppose μ et ν σ-finies. Alors :

(i) $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables.

(ii) Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right)$$

Théorème 48 (Fubini-Lebesgue)**.** Soient $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un autre espace mesuré et $f \in \mathscr{L}_1(\mu \otimes \nu)$. Alors :

(i) Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x,y)$ et pour tout $x \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables.

(ii) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont intégrables, les fonctions étant définies pp.

(iii) On a :
$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)$$

Contre-exemple 49. On considère $f : (x,y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Alors, $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0$, mais $\int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ln(2)$.

Exemple 50. Soient $f : (x,y) \mapsto xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$. Alors, [GOU20] p. 359
$$\int\int_D = f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

IV - L'espace L_2

1. Aspect hilbertien

Définition 51. L'application [B-P] p. 185
$$\langle .,. \rangle : (f,g) \mapsto \int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$$
définit un produit scalaire hermitien sur L_2. Muni de ce produit scalaire précédent, L_2 est un espace de Hilbert.

a. Conséquences

Théorème 52 (Projection orthogonale)**.** Soit F un sous-espace vectoriel fermé de L_2. Alors,
$$L_2 = F \oplus F^\perp$$

Corollaire 53 (Théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $\varphi \in L_2'$ une forme linéaire continue. Alors,
$$\exists! g \in L_2 \text{ telle que } \forall f \in L_2,\ \varphi(f) = \int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$$

[DEV] [Z-Q] p. 222

Application 54 (Dual de L_p)**.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On note $\forall p \in]1,2[$, $L_p = L_p(X, \mathscr{A}, \mu)$. L'application

$$\varphi : \begin{array}{ll} L_q & \to (L_p)' \\ g & \mapsto \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu\right) \end{array} \qquad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

Remarque 55. Plus généralement, si l'on identifie g et φ_g : [LI] p. 140

— L_q est le dual topologique de L_p pour $p \in]1, +\infty[$.

— L_∞ est le dual topologique de L_1 si μ est σ-finie.

b. Base hilbertienne de L_2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$. [BMP] p. 110

Définition 56. On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$.

Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids.

Notation 57. On note $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 58. Muni de

$$\langle ., . \rangle : (f, g) \mapsto \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x) \, \mathrm{d}x$$

$L_2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 59. Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n. C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à ρ sur I.

Exemple 60 (Polynômes de Hermite)**.** Si $\forall x \in I$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

p. 140

Lemme 61. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_1(I, \rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

[DEV]

Application 62. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Contre-exemple 63. On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. Alors, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

2. Application aux séries de Fourier

Notation 64. [Z-Q] p. 73
- Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Proposition 65. $L_2^{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle ., . \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

Théorème 66. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2^{2\pi}$. [BMP] p. 123

Corollaire 67 (Égalité de Parseval)**.**

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

Exemple 68. On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors, [GOU20] p. 272

$$\frac{\pi^4}{90} = \|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Remarque 69. L'égalité du Corollaire 67 est valable dans $L_2^{2\pi}$, elle signifie donc que

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n - f \right\|_2 \longrightarrow_{N \to +\infty} 0$$

[BMP] p. 124