

## 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

### I - Séries réelles et complexes

#### 1. Notion de série et convergence

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Muni de sa norme usuelle  $|\cdot|$ ,  $\mathbb{K}$  est un espace de Banach.

**Définition 1.** Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

— On appelle **série** de terme général  $u_n$  la suite  $(S_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \cdots + u_n$$

On note cette série  $\sum u_n$ .

—  $u_n$  s'appelle le **terme** d'indice  $n$ .

—  $S_n$  s'appelle la **somme partielle** d'indice  $n$ .

[GOU20]  
p. 208

**Définition 2.** En reprenant les notations précédentes, on dit que  $\sum u_n$  **converge** si la suite  $(S_n)$  converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la **somme** de la série, et on la note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Définition 3.** On appelle **reste** d'ordre  $n$  d'une série convergente  $\sum u_n$  l'élément  $R_n$  défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Exemple 4.** Soit  $q \in \mathbb{C}$ . Alors  $\sum q^n$  converge  $\iff |q| < 1$ . Dans ce cas :

— La somme partielle d'indice  $n$  est égale à  $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

— La somme de la série est égale à  $\frac{1}{1-q}$ .

— Le reste d'ordre  $n$  de  $\sum q^n$  est égal à  $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ .

**Proposition 5.** Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

[AMR11]  
p. 81

**Contre-exemple 6.** La réciproque est fautive, par exemple en considérant la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ , on a  $\sum_{k=1}^n u_k = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Proposition 7.** Muni des opérations :

- $\forall (u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n),$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \sum u_n = \sum (\lambda u_n),$

l'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.

**Proposition 8** (Critère de Cauchy pour les séries). Une série  $\sum u_n$  converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^p u_{n+k} \right| < \epsilon$$

[GOU20]  
p. 209

**Définition 9.** On dit que  $\sum u_n$  est **absolument convergente** si  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Théorème 10.** Toute série à valeurs dans  $\mathbb{K}$  absolument convergente est convergente.

Ce dernier théorème justifie de s'intéresser plus particulièrement aux séries à termes positifs.

## 2. Séries à termes positifs

### a. Comparaison

**Proposition 11.** Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

**Corollaire 12.** On considère deux séries réelles  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ . Alors :

- (i) Si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  converge.
- (ii) Si  $\sum u_n$  diverge,  $\sum v_n$  diverge.

**Proposition 13.** On considère deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  à termes positifs.

- (i) Si  $v_n = O(u_n)$  et si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum v_n$  converge.
- (ii) Si  $u_n \sim v_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.
  - En cas de convergence, les restes vérifient  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ .
  - En cas de divergence, les sommes partielles vérifient  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ .

**Application 14** (Formule de Stirling).

$$\exists k > 0 \text{ tel que } n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Application 15** (Développement asymptotique de la suite des sinus itérés). Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Alors

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

p. 228

**Proposition 16** (Comparaison série - intégrale). Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors la suite  $(U_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

est convergente. En particulier, la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

p. 211

**Exemple 17.** La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Exemple 18.** La série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

**Lemme 19.** Soit  $\alpha > 1$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[I-P]  
p. 380

**Application 20** (Développement asymptotique de la série harmonique). On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Alors, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Proposition 21.** Soit  $\sum f(n)$  une série relevant d'une comparaison série - intégrale. On note

[AMR11]  
p. 109

[DEV]

$R_n$  le reste d'ordre  $n$  de cette série. Alors,

$$\forall n \geq 1, \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq |R_n| \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

**Exemple 22.** La somme  $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^3}$  donne une approximation de  $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  à moins de  $125 \times 10^{-5}$  près.

**Proposition 23.** Soient deux séries réelles  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  à termes strictement positifs telles que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang. Alors :

- (i) Si  $\sum u_n$  converge,  $\sum v_n$  converge.
- (ii) Si  $\sum v_n$  diverge,  $\sum u_n$  diverge.

[GOU20]  
p. 213

## b. Critères

**Proposition 24** (Règle de d'Alembert). Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

- (i) Si  $\lambda < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- (ii) Si  $\lambda > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple 25.**  $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  converge.

[AMR11]  
p. 94

**Proposition 26.** Soit  $\sum u_n$  une série relevant de la règle de D'Alembert. On note  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de cette série. Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  tels que

$$\forall n \geq N, |R_n| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

p. 108

**Exemple 27.**  $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$  donne une valeur approchée de  $e$  à moins de  $3 \times 10^{-8}$  près par défaut.

**Proposition 28** (Règle de Cauchy). Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

[GOU20]  
p. 214

- (i) Si  $\lambda < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- (ii) Si  $\lambda > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple 29.**  $\sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$  converge.

[AMR11]  
p. 112

**Proposition 30.** Soit  $\sum u_n$  une série relevant de la règle de Cauchy. On note  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de cette série. Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  tels que

p. 107

$$\forall n \geq N, |R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

**Exemple 31.** En reprenant les notations précédentes, pour  $u_n = n^{-n}$ , on a  $R_4 < 0,00035$ .

### 3. Séries semi-convergentes

**Définition 32.** On appelle **séries semi-convergentes** les séries convergentes mais non absolument convergentes.

p. 214

**Théorème 33** (Critère de Leibniz). Soit  $(a_n)$  une suite à termes positifs, décroissantes, tendant vers 0. Alors

$$\sum (-1)^n a_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

**Exemple 34.** La série  $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$  est convergente pour  $\alpha > 0$ . De plus, les restes  $R_n$  vérifient

p. 97

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

**Proposition 35** (Transformation d'Abel). Soit une série  $\sum u_n$  où  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_n v_n$ . On note  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ . Alors,

[GOU20]  
p. 215

$$\sum_{k=0}^n u_k = \alpha_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

**Corollaire 36** (Critère d'Abel). Soit une série  $\sum u_n$  où  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_n v_n$ . On suppose :

[AMR11]  
p. 99

- $(\alpha_n)$  est une suite réelle positive, décroissante et qui tend vers 0.
- La série  $\sum v_n$  est bornée par une constante  $M$ .

Alors  $\sum u_n$  est convergente, et les restes  $R_n$  vérifient  $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq M a_{n+1}$ .

*Remarque 37.* En reprenant les notations précédentes, avec  $v_n = (-1)^n$ , on retrouve le critère de Leibniz.

[GOU20]  
p. 216

**Exemple 38.** La série  $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$  converge pour tout  $\alpha > 0, \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

## II - Calcul de sommes

### 1. Séries de Fourier

**Définition 39.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On appelle **coefficients de Fourier** de  $f$  les nombres complexes définis par

p. 267

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

La **série de Fourier** associée à  $f$  est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

**Théorème 40** (Parseval). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors la série de Fourier de  $f$  est convergente et,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

**Exemple 41.** Avec  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ , on obtient  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

**Théorème 42** (Jordan-Dirichlet). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors la série de Fourier de  $f$  est convergente en tout point  $x \in \mathbb{R}$  et sa somme en ce point vaut

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

**Exemple 43.** Toujours avec  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ , on obtient  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## 2. Séries entières

**Définition 44.** On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme  $\sum a_n z^n$  où  $z$  est une variable complexe et où  $(a_n)$  est une suite complexe.

p. 247

**Lemme 45 (Abel).** Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que  $(a_n z_0^n)$  soit bornée. Alors :

- (i)  $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.
- (ii)  $\forall r \in ]0, |z_0|[$ ,  $\sum a_n z^n$  converge normalement dans  $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .

**Définition 46.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de  $\sum a_n z^n$ . On a :

- $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.
- $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ ,  $\sum a_n z^n$  diverge.
- $\forall r \in [0, R[$ ,  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $\overline{D}(0, r)$ .

Le disque  $D(0, R)$  est le **disque de convergence** de la série, le cercle  $C(0, R)$  est le **cercle d'incertitude**.

**Exemple 47.**  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est une série entière de rayon de convergence infini.

**Théorème 48 (Nombres de Bell).** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Par convention on pose  $B_0 = 1$ . Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

[GOU21]  
p. 314

**Théorème 49 (Abel angulaire).** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que  $\sum a_n$  converge. On note  $f$  la somme de cette série sur le disque unité  $D$  de  $\mathbb{C}$ . On fixe  $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  et on pose  $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

[GOU20]  
p. 263

[DEV]

**Application 50.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

**Application 51.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

**Contre-exemple 52.** La réciproque est fautive :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

**Théorème 53** (Taubérien faible). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On note  $f$  la somme de cette série sur  $D(0, 1)$ . On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$$

Si  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , alors  $\sum a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ .

*Remarque 54.* Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 49. Il reste vrai en supposant  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  (c'est le théorème Taubérien fort).

## Annexes

[GOU20]  
p. 263

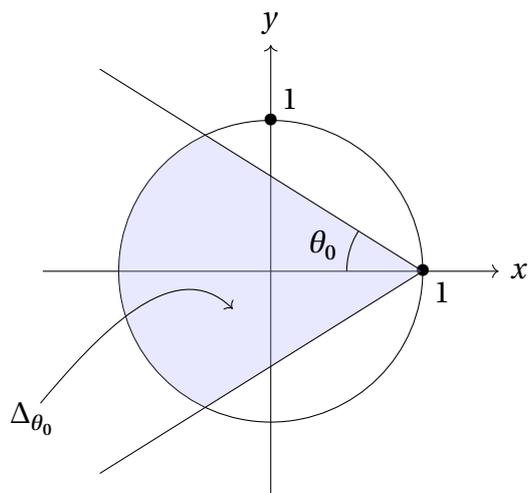


FIGURE 1 – Illustration du théorème d'Abel angulaire.