229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I - Fonctions monotones

1. Définition et première propriétés

Définition 1. Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. [R-R] p. 31

— On dit que f est **croissante** si $\forall x, y \in X$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

— On dit que f est **décroissante** si $\forall x, y \in X$, $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.

— On dit que f est **monotone** si f est croissante ou décroissante.

Remarque 2. Les définitions de f **strictement croissante** et f **strictement décroissante** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Par conséquent, f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante. Pour cette raison, nous pouvons nous limiter à l'étude des fonctions croissantes.

Exemple 3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction monotone.

Proposition 4. L'ensemble des fonctions croissantes est stable par addition, par multiplication par un scalaire positif et par composition. [D-L] p. 405

Proposition 5. Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur $\mathring{I}$. Alors f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. [ROM19-1] p. 205

2. Régularité

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point. p. 162

Définition 6. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ a pour **limite à gauche** (resp. **à droite**) ℓ en $\alpha \in \overline{I}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } \forall x \in I \cap]\alpha - \eta, \alpha[, \ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(resp. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que $\forall x \in I \cap]\alpha, \alpha + \eta[, \ |f(x) - \ell| < \epsilon$).

Théorème 7. On suppose que I est un intervalle ouvert. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, elle admet alors une limite à gauche et à droite en tout point. Dans le cas où f est croissante, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x^-) = \sup_{\substack{t \in I \\ t < x}} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{\substack{t \in I \\ t > x}} f(t)$$

Définition 8. Si $\alpha \in \mathring{I}$, et si $f : I \to \mathbb{R}$ est discontinue en α avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que f a une **discontinuité de première espèce** en α.

Proposition 9. Une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

Théorème 10. On suppose que I est un intervalle ouvert. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de f est dénombrable.

Exemple 11. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

Proposition 12. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que $f(I)$ est un intervalle, elle est alors continue sur I. p. 175

Théorème 13 (Bijection)**.** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue et strictement monotone, alors :

(i) $f(I)$ est un intervalle.

(ii) f^{-1} est continue.

(iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f.

Exemple 14. La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+_*$ qui admet donc une bijection réciproque $\ln$ qui est strictement croissante.

Proposition 15. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème 16 (Lebesgue)**.** Une application monotone est dérivable presque partout. [D-L] p. 405

3. Suites et séries

Lemme 17. Une limite simple d'une suite de fonctions croissantes est croissante.

[GOU20] p. 238

Théorème 18 (Second théorème de Dini)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles continues définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction continue sur I, alors la convergence est uniforme.

p. 212

Proposition 19 (Comparaison série - intégrale)**.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Application 20 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

II - Fonctions convexes

Soit I une partie convexe d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ non réduite à un point.

1. Définitions

[ROM19-1] p. 225

Définition 21.

— I est **convexe** si $\forall a, b \in I$, $[a, b] \subseteq I$.

— Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

— Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

Remarque 22. Les définitions de f **strictement convexe** et f **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Exemple 23. — $x \mapsto \|x\|$ est convexe sur E.

— exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 24. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Théorème 25. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x, y \in I$, $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0,1]$.

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

Proposition 26. — Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

— La composée $\varphi \circ g$ d'une fonction convexe croissante $\varphi : J \to \mathbb{R}$ avec une fonction fonction convexe $g : I \to J$ est croissante.

— Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

À partir de maintenant, on supposera que I est un intervalle réel non réduit à un point.

2. Propriétés sur $\mathbb{R}$

Remarque 27. Dans le cadre réel, la Définition 21 revient à dire que les cordes $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au-dessus du graphe de f pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$. [GOU20] p. 95

Proposition 28. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x_0 \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

est croissante.

Corollaire 29 (Inégalité des trois pentes)**.** Soient fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Alors,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Définition 30. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en $\alpha \in I$ si la p. 71

limite

$$\lim_{\substack{t\to a^- \\ t\in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

(resp. $\lim_{\substack{t\to a^+ \\ t\in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$) existe.

Proposition 31. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convexe possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$. De plus les applications dérivées à gauche f'_g et à droite f'_d sont croissantes avec $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \mathring{I}$. p. 96

Théorème 32. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe.

(ii) f' est croissante.

(iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 33. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

3. Fonctions log-convexes

Définition 34. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^+_*$ est **log-convexe** si $\ln \circ f$ est convexe sur I. [ROM19-1] p. 228

Proposition 35. Une fonction log-convexe est convexe.

Contre-exemple 36. $x \mapsto x$ est convexe mais non log-convexe.

Théorème 37. Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}^+_*$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est log-convexe.

(ii) $\forall \alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe.

(iii) $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x+ty) \leq (f(x))^{1-t}(f(y))^t$.

(iv) $\forall \alpha > 0$, f^α est convexe.

Lemme 38. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ vérifie : p. 364

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

[DEV] **Théorème 39** (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 38. Alors $f = \Gamma$. p. 364

Remarque 40. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

III - Applications

1. Inégalités

Proposition 41 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, [GOU20] p. 97

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 42 (Inégalité de Minkowski)**.** Soit $p \geq 1$. Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 43 (Inégalité de Jensen)**.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour toute fonction u continue sur un intervalle $[a, b]$, on a : [ROM19-1] p. 241

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \circ u(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 44 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique)**.** Pour toute suite finie $x = (x_i)$ de n réels strictement positifs, on a :

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

2. Recherche d'extrema

Proposition 45. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée. p. 234

Contre-exemple 46. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

Proposition 47. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \mathring{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α.

Proposition 48. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

3. Méthode de Newton

[DEV] **Théorème 49** (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction [ROU] p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c,d]$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 50. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c,d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a,d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 51. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.

— En itérant la fonction $F : x \longmapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bibliographie

Leçons pour l'agrégation de mathématiques **[D-L]**

Maximilien Dreveton et Joachim Lhabouz. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral.* Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Formulaire de maths **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours.* De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.