

## 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

### I - Suites récurrentes

#### 1. Définition et premières propriétés

**Définition 1.** Soit  $E$  un ensemble. On dit qu'une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  est **récurrente** d'ordre  $h \in \mathbb{N}^*$  si on peut écrire

$$\forall n \geq h, u_{n+h} = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h}) \quad (*)$$

où  $f : E^h \rightarrow E$  et les premières valeurs  $u_0, \dots, u_{h-1} \in E$  étant donnés.

[DAN]  
p. 145

**Exemple 2.** On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

et on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 3^n$$

**Exemple 3.** On considère les suite numérique  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \prod_{k=0}^n u_k$$

Alors, pour  $u_0 = \cos(\theta)$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

[GOU20]  
p. 206

**Application 4** (Formule de Viète).

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \dots$$

**Exemple 5.** La suite de fonctions polynômiales  $(P_n)$  définie par récurrence par :

$$P_0 : z \mapsto 1, P_1 : z \mapsto z, \text{ et } \forall n \geq 1, zP_n : z \mapsto P_{n-1}(z) - P_{n+1}(z)$$

est une suite bornée si et seulement si  $z = \pm 1$ .

[FGN3]  
p. 160

**Théorème 6.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact. Soit  $(u_n)$  une suite de  $E$  telle que  $d(u_n, u_{n-1}) \rightarrow 0$ . Alors l'ensemble  $\Gamma$  des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est connexe.

[I-P]  
p. 116

**Corollaire 7** (Lemme de la grenouille). Soient  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue et  $(x_n)$  une suite de  $[0, 1]$  telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors  $(x_n)$  converge si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ .

## 2. Récurrences classiques

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On fixe  $(u_n)$  une suite récurrente d'ordre 1 définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .

[GOU20]  
p. 201

**Définition 8.** — Si  $f$  est une translation (ie.  $f$  est de la forme  $f : x \mapsto x + b$  où  $b \in \mathbb{K}$ ), alors  $(u_n)$  est une suite **arithmétique** de raison  $b$ .

— Si  $f$  est linéaire (ie.  $f$  est de la forme  $f : x \mapsto ax$  où  $a \in \mathbb{K}$ ), alors  $(u_n)$  est une suite **géométrique** de raison  $a$ .

— Si  $f$  est affine (ie.  $f$  est de la forme  $f : x \mapsto ax + b$  où  $a, b \in \mathbb{K}$ ), alors  $(u_n)$  est une suite **arithmético-géométrique**.

— Si  $f$  est homographique (ie.  $f$  est de la forme  $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $a, b, c, d \in E$  et  $ad - bc \neq 0$ ), alors  $(u_n)$  vérifie une **réurrence homographique**.

**Proposition 9.** (i) Si  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $b$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$ .

(ii) Si  $(u_n)$  est géométrique de raison  $a$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0$ .

(iii) Si  $(u_n)$  est arithmético-géométrique et si  $1 - a \neq 0$ , en posant  $r = (1 - a)^{-1}b$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r$ .

**Proposition 10.** Supposons que  $(u_n)$  vérifie une récurrence homographique. On considère l'équation

$$f(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0 \quad (E)$$

Alors :

1. Si  $(E)$  admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_n - r_1}{u_n - r_2} = k^n \frac{u_0 - r_1}{u_0 - r_2}$  où  $k = \frac{a - r_1 c}{a - r_2 c}$ .
2. Si  $(E)$  admet une racine double  $r$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{u_n - r} = \frac{1}{u_0 - r} + kn$  où  $k = \frac{c}{a - rc}$ .

*Remarque 11.* Ces formules permettent de décider s'il existe un rang  $n$  tel que le dénominateur de  $f$  s'annule, auquel cas les termes ultérieurs de la suite ne sont pas définis.

**Exemple 12.** Pour la relation  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ , l'équation  $(E)$  admet  $\pm 1$  pour solutions, donc  $\frac{u_n + 1}{u_n - 1} = 3^n \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1}$ .

### 3. Suites récurrentes vectorielles

**Proposition 13** (Déterminant circulant). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

[GOU21]  
p. 153

[DEV]

**Application 14** (Suite de polygones). Soit  $P_0$  un polygone dont les sommets sont  $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$ . On définit la suite de polygones  $(P_k)$  par récurrence en disant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les sommets de  $P_{k+1}$  sont les milieux des arêtes de  $P_k$ .

Alors la suite  $(P_k)$  converge vers l'isobarycentre de  $P_0$ .

[I-P]  
p. 389

## II - Outils pour étudier les suites récurrentes

### 1. Stabilité de l'intervalle et continuité

Soient  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On fixe  $(u_n)$  une suite récurrente d'ordre 1 définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

[AMR11]  
p. 38

**Théorème 15** (Caractérisation séquentielle de la continuité). En reprenant les notations précédentes, une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue si et seulement si pour toute suite réelle convergente  $(v_n) \in I^{\mathbb{N}}$  dont on note  $\ell$  la limite,  $g(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Corollaire 16.** Si une suite récurrente d'ordre 1 (dont on note  $f$  la fonction) converge vers  $\ell$ , alors  $f(\ell) = \ell$ .

**Exemple 17.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sin(u_n)$  converge vers 0.

**Proposition 18.** (i) Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)$  est monotone et son sens de monotonie est donnée par le signe de  $u_1 - u_0$ .

(ii) Si  $f$  est décroissante, alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et leur sens de monotonie est opposé.

[GOU20]  
p. 200

**Exemple 19.** La suite réelle  $(u_n)$  définie par récurrence par :

$$u_0 \in [0, 1[ \text{ et } \forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$$

est une suite qui converge vers 1.

## 2. Équation caractéristique

**Définition 20.** Une suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  vérifie une **réurrence linéaire homogène** d'ordre  $h$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+h} = a_{h-1}u_{n+h-1} + \cdots + a_0u_n \quad (*)$$

où  $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 21.** Si on note  $r_1, \dots, r_q$  les racines du polynôme caractéristique de (\*) (de multiplicités respectives  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ ), alors l'ensemble des suites vérifiant (\*) est l'ensemble des suites  $(u_n)$  telles que :

$$u_n = P_1(n)r_1^n + \cdots + P_q(n)r_q^n$$

où  $\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, P_i$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\alpha_i$ .

**Exemple 22.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ . Son polynôme caractéristique est  $P = X^2 - aX - b$ .

1. Si  $P$  a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont tels que  $u_0 = \lambda + \mu$  et  $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$ .
2. Si  $P$  a une racine double  $r$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont tels que  $u_0 = \mu$  et  $u_1 = (\lambda + \mu)r$ .

**Exemple 23.** Soit  $(F_n)$  la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $\forall n \geq 2$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

[AMR11]  
p. 47

**Exemple 24.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$  est à termes positifs si et seulement si  $u_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

### 3. Développement asymptotique

**Définition 25.** À toute suite numérique  $(u_n)$  on y associe sa suite  $(v_n)$  des **moyennes de Cesàro** où

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

p. 53

**Théorème 26.** Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$ , alors sa suite des moyennes de Cesàro converge vers  $\ell$ . On dit que  $(u_n)$  converge **au sens de Cesàro**.

**Proposition 27.** Soit  $f$  une application continue définie au voisinage de  $0^+$  admettant un développement asymptotique en 0 de la forme  $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ , où  $a > 0$  et  $\alpha > 1$ . Alors pour  $u_0 > 0$  assez petit, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  vérifie

$$u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha - 1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

[FGN3]  
p. 142

**Exemple 28.** Si  $f = \sin$  et  $(u_n)$  est définie par  $u_0 \in [0, 2\pi]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on a l'équivalent en  $+\infty$  :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

[GOU20]  
p. 228

**Proposition 29.** En reprenant les notations précédentes, on a, pour  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

**Exemple 30.** On définit  $(u_n)$  par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ , on a l'équivalent en  $+\infty$  :

$$u_n = n + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

[FGN3]  
p. 148

### III - Applications à la résolution approchée d'équations

#### 1. Point fixe et itération

**Théorème 31** (Point fixe de Banach). Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application contractante (ie.  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que  $\forall x, y \in E$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ ). Alors,

$$\exists! x \in E \text{ tel que } f(x) = x$$

De plus la suite des itérés définie par  $x_0 \in E$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $x$ .

[DAN]  
p. 146

**Théorème 32** (Point fixe dans un compact). Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact et  $f : E \rightarrow E$  telle que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

alors  $f$  admet un unique point fixe et pour tout  $x_0 \in E$ , la suite des itérés

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers ce point fixe.

**Application 33.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, strictement croissante et telle que  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  et  $0 < m \leq f'(x) \leq M$  sur  $[a, b]$ . On pose  $\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{M}f(x)$ . On considère l'équation :

$$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x \tag{E}$$

Alors :

- (i) (E) admet une unique solution  $x$  et pour tout point initial  $x_0 \in [a, b]$ , la suite des itérés  $(x_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  converge vers  $x$ .
- (ii) La vitesse de convergence est estimée par la suite géométrique  $\left(1 - \frac{m}{M}\right)$  : il faut que les bornes  $m$  et  $M$  soient proches.

[DEM]  
p. 95

**Remarque 34.** Cela marche aussi dans le cas où  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$  et  $-M \leq f'(x) \leq -m < 0$  (il suffit alors de changer  $f$  en  $-f$ ).

**Définition 35.** Soient  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow I$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $a \in I$  un point fixe de  $\varphi$ .

- Si  $|\varphi'(a)| < 1$ , on dit que  $a$  est **attractif**. Si de plus  $\varphi'(a) = 0$ ,  $a$  est **superattractif**.
- Si  $|\varphi'(a)| > 1$ , on dit que  $a$  est **répulsif**.

**Proposition 36.** On reprend les notations précédentes et on considère la suite des itérés  $(x_n)$  (avec  $x_0 \in I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ). Alors :

- (i) Si  $a$  est attractif,  $(x_n)$  converge à une vitesse géométrique :

$$|x_n - a| \leq k^n |x_0 - a|$$

- (ii) Si  $a$  est superattractif et  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^2$  telle que  $|\varphi''| < M$  sur  $I$ , alors la vitesse de convergence est hypergéométrique :

$$|x_n - a| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^n}$$

- (iii) Si  $a$  est répulsif, il existe  $h > 0$  tel que  $\varphi|_{[a-h, a+h]}$  admette une application réciproque  $\varphi^{-1}$  définie sur  $\varphi([a-h, a+h])$  et le point  $a$  est attractif pour  $\varphi^{-1}$ .

**Exemple 37.** Soit  $f : x \mapsto x^3 - 4x + 1$ . On pose  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 1)$  et on considère

$$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x \tag{E}$$

Alors (E) possède trois solutions réelles  $a_1 < a_2 < a_3$  telles que :

- $a_1 \in ]-2, 5; -2[$ .
- $a_2 \in ]0; 0, 5[$  et  $a_2$  est attractif.
- $a_3 \in ]1, 5; 2[$ .

## 2. Méthode de Newton

**Théorème 38** (Méthode de Newton). Soit  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $f' > 0$ ). Alors :

- (i)  $\exists! a \in [c, d]$  tel que  $f(a) = 0$ .
- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

**Corollaire 39.** En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $f$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).
- (ii)  $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$  pour  $x_0 > a$ .

**Exemple 40.** — On fixe  $y > 0$ . En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{y}{x} \right)$  pour un nombre de départ compris entre  $c$  et  $d$  où  $0 < c < d$  et  $c^2 < 0 < d^2$ , on peut obtenir une approximation du nombre  $\sqrt{y}$ .

— En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$  pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Exemple 41.** La méthode de Newton appliquée à la fonction  $x \mapsto x^3 - 4x + 1$  dans le but d'approximer ses zéros donne :

$x_0$	-2	0	2
$x_1$	-2,125	0,25	1,875
$x_2$	-2,114975450	0,254098361	1,860978520
$x_3$	-2,114907545	0,254101688	1,860805877
$x_4$	-2,114907541	= $x_3$	1,860805853
$x_5$	= $x_4$		= $x_4$

[DEM]  
p. 102

### 3. Généralisation à $\mathbb{R}^m$

**Théorème 42** (Méthode de Newton-Raphson). Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  (où  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  est un ouvert) de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(a) = 0$ . On suppose que  $df_a$  est inversible. Alors il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\Omega$  tel que  $\varphi : x \mapsto x - (df_x)^{-1}(f(x))$  soit bien définie sur  $U$  et la suite des itérés  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  converge quadratiquement vers  $a$ .

p. 110

**Exemple 43.** On considère le système

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ xe^x + ye^y = 0 \end{cases} \quad (S)$$

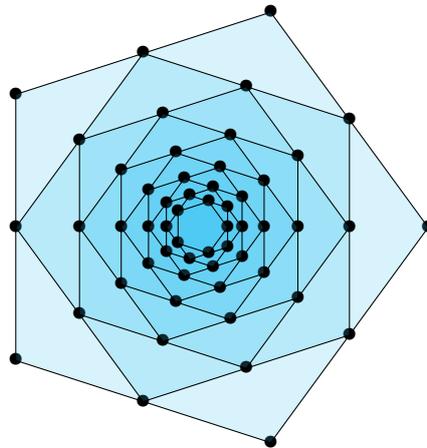
On pose  $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$  et  $\Delta(x, y) = (2x + y)(y + 1)e^y - (x - 4y)(x + 1)e^x$  ainsi que :

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta(x, y)} \begin{pmatrix} (y + 1)e^y & -x + 4y \\ -(x + 1)e^x & 2x + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + xy - 2y^2 - 4 \\ xe^x + ye^y \end{pmatrix}$$

Alors la suite des itérés  $(X_n) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  converge vers l'unique solution de (S) et on a :

$n$	$x_n$	$y_n$
0	-2	0,2
1	-2,130690999	0,205937784
2	-2,126935837	0,206277868
3	-2,126932304	0,206278156

## Annexes



[I-P]  
p. 389

FIGURE 1 – La suite de polygones.

# Bibliographie

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Analyse numérique et équations différentielles**

[DEM]

Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. 4<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.

<https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp>.

## **Oraux X-ENS Mathématiques**

[FGN3]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3*. 3<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 mai 2020.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Petit guide de calcul différentiel**

**[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.