

## 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

### I - Comparaison de suites et de fonctions

Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ .

[GOU20]  
p. 87

#### 1. Relations de comparaison

**Définition 1.** Soit  $X$  un espace métrique. On considère deux applications  $f, g : D \rightarrow E$  où  $D \subseteq X$ . Soit  $x_0$  un point d'accumulation de  $D$ .

— On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  au voisinage de  $x_0$ , si

$$\exists C > 0, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tels que } \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq C \|g(x)\|$$

On note alors  $f(x) = O(g(x))$  quand  $x \rightarrow x_0$ .

— On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $x_0$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tels que } \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq \epsilon \|g(x)\|$$

On note alors  $f(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow x_0$ .

— On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $x_0$  si  $f(x) - g(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow x_0$  et on écrit alors  $f(x) \sim g(x)$  quand  $x \rightarrow x_0$ .

*Remarque 2.* Dans la pratique, on utilisera souvent cette notation pour des fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  au voisinage d'un point de  $\mathbb{R}$  ou de l'infini, ou pour des suites réelles ou complexes  $(u_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exemple 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

—  $f = O(1)$  si et seulement si  $f$  est une application bornée au voisinage de  $x_0$ .

—  $f = o(1)$  si et seulement si  $f$  admet 0 pour limite en  $x_0$ .

—  $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $+\infty$  signifie que  $x \mapsto xf(x)$  admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

[DAN]  
p. 132

**Proposition 4.** On considère deux applications  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  où  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose qu'il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$  tel que  $g$  ne s'annule pas. Alors, quand  $x \rightarrow x_0$  :

(i)  $f(x) = o(g(x))$  si et seulement si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .

(ii)  $f(x) \sim g(x)$  si et seulement si  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ .

**Proposition 5.** La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence, compatible avec le produit et la puissance. Si deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  équivalentes au voisinage d'un point admettent des limites  $\ell_1$  et  $\ell_2$  en ce point, alors  $\ell_1 = \ell_2$ .

**Contre-exemple 6.** —  $\sim$  n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple, quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$x + \sqrt{x} \sim x, \quad -x \sim -x + \ln(x) \quad \text{mais} \quad \sqrt{x} \not\sim \ln(x)$$

—  $\sim$  n'est pas compatible avec la composition. Par exemple, quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$x \sim x + 1 \quad \text{mais} \quad e^x \not\sim e^{x+1}$$

## 2. Développement limité

Dans cette partie,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point. Soit  $f : I \rightarrow E$  une application. On suppose  $0 \in I$ .

[GOU20]  
p. 89

**Définition 7.** On dit que  $f$  admet un **développement limité** à l'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  s'il existe  $a_0, \dots, a_n \in E$  tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

*Remarque 8.* On pourrait de même définir les développements limités au voisinage d'un point  $a \in \bar{I}$ .

**Proposition 9.** (i) Un développement limité, s'il existe, est unique.

- (ii) Si  $f$  admet un développement limité en 0 à l'ordre  $n \geq 1$ ,  $f$  est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut  $a_1$ .
- (iii) Si  $f$  est paire (resp. impaire), les coefficients du développement limité d'indice impair (resp. pair) sont nuls.
- (iv) Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en 0,  $f'$  admet un développement limité en 0 :  $f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} + o(x^{n-1})$ .
- (v) Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  admet un développement limité en 0 :  $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ ; alors,  $f$  admet un développement limité en 0 donné par  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{k+1})$ .
- (vi) Les règles de somme, produit, quotient et composition obéissent aux mêmes règles que pour les polynômes (sous réserve de bonne définition).

**Théorème 10** (Formule de Taylor-Young). On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  telle que  $f^{(n+1)}(x)$  existe pour  $x \in I$ . Alors, quand  $h \rightarrow 0$ , on a

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

**Proposition 11.** Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en 0, alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

**Exemple 12.** En 0, on a les développements limités usuels suivants.

- $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ .
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ .
- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$ .
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$ .
- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$ .

**Application 13.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = -2$$

### 3. Développement asymptotique

**Définition 14.** Soient  $X$  un espace métrique et  $x_0 \in X$ . On appelle **échelle de comparaison** un ensemble  $\mathcal{E}$  de fonctions définies au voisinage de  $x_0$  dans  $X$ , sauf éventuellement en  $x_0$ , et vérifiant la propriété suivante : si  $f, g \in \mathcal{E}$ , alors  $f = g$  ou bien  $f = o(g)$  ou bien  $g = o(f)$ .

**Exemple 15.** Au voisinage de  $+\infty$  pour les fonctions de la variable réelle, les fonctions du type  $x \mapsto x^\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  forment une échelle de comparaison.

**Définition 16.** Soit  $X$  un espace métrique. On considère deux applications  $f, g : D \rightarrow E$  où  $D \subseteq X$ . Soient  $x_0$  un point d'accumulation de  $D$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On appelle **développement asymptotique** à  $k$  termes de  $f$  par rapport à une échelle de comparaison  $\mathcal{E}$  au voisinage de

$x_0$  toute expression de la forme

$$\sum_{i=1}^k c_i f_i$$

vérifiant

- (i)  $c_1, \dots, c_k \in E$  sont des constantes multiplicatives.
- (ii)  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$  avec pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$ .
- (iii)  $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i f_i + o(f_k(x))$  quand  $x \rightarrow x_0$ .

$c_1 f_1$  est appelée **partie principale** de  $f$  au point  $x_0$ .

*Remarque 17.* En reprenant les notations précédentes :

- $f(x) \sim c_1 f_1(x)$  quand  $x \rightarrow x_0$ .
- Un tel développement, s'il existe, est unique.

## II - Exemples de développements asymptotiques de suites

### 1. Séries numériques

**Proposition 18** (Comparaison série - intégrale). Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors la suite  $(U_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

est convergente. En particulier, la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

p. 212

**Lemme 19.** Soit  $\alpha > 1$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[I-P]  
p. 380

**Proposition 20** (Développement asymptotique de la série harmonique). On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Alors, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[DEV]

**Application 21** (Série de Bertrand). La série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

[GOU20]  
p. 212

## 2. Suites récurrentes

**Définition 22.** À toute suite numérique  $(u_n)$  on y associe sa suite  $(v_n)$  des **moyennes de Cesàro** où

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

[AMR11]  
p. 53

**Théorème 23.** Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$ , alors sa suite des moyennes de Cesàro converge vers  $\ell$ . On dit que  $(u_n)$  converge **au sens de Cesàro**.

**Proposition 24.** Soit  $f$  une application continue définie au voisinage de  $0^+$  admettant un développement asymptotique en 0 de la forme  $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ , où  $a > 0$  et  $\alpha > 1$ . Alors pour  $u_0 > 0$  assez petit, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  vérifie

$$u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha - 1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

[FGN3]  
p. 142

**Exemple 25.** Si  $f = \sin$  et  $(u_n)$  est définie par  $u_0 \in [0, 2\pi]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , on a l'équivalent en  $+\infty$  :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

**Proposition 26.** En reprenant les notations précédentes, on a, pour  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

[GOU20]  
p. 228

**Exemple 27.** On définit  $(u_n)$  par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ , on a l'équivalent en  $+\infty$  :

$$u_n = n + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

[FGN3]  
p. 148

**Théorème 28** (Méthode de Newton). Soit  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $f' > 0$ ). Alors :

(i)  $\exists ! a \in [c, d]$  tel que  $f(a) = 0$ .

[ROU]  
p. 152

[DEV]

- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

**Corollaire 29.** En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $f$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).
- (ii)  $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$  pour  $x_0 > a$ .

**Exemple 30.** — On fixe  $y > 0$ . En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{y}{x} \right)$  pour un nombre de départ compris entre  $c$  et  $d$  où  $0 < c < d$  et  $c^2 < 0 < d^2$ , on peut obtenir une approximation du nombre  $\sqrt{y}$ .

— En itérant la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$  pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

### 3. Suites définies implicitement

**Exemple 31.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $a_n$  la plus grande racine réelle de  $X^{2n} - 2nX + 1$ . Alors,

$$a_n = 1 + \frac{\ln(2n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

**Exemple 32.** Soit  $(u_n)$  une suite de réels vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ . Alors,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

**Exemple 33.** Soit  $c > 0$ . On note  $x_n$  l'unique racine réelle de  $x \mapsto x \sin(x) - c \cos(x)$ . Alors,

$$x_n - n\pi \sim \frac{c}{n\pi}$$

### III - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

#### 1. Fonctions définies par la somme d'une série

**Théorème 34** (Central limite). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note  $m$  l'espérance et  $\sigma^2$  la variance commune à ces variables. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$ . Alors,

$$\left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]  
p. 307

**Application 35** (Théorème de Moivre-Laplace). On suppose que  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ . Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

**Lemme 36.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X \sim \Gamma(a, \gamma)$  et  $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$ . Alors  $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$ .

p. 180

**Application 37** (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

p. 556

**Proposition 38.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et est non nulle. Alors,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$  converge et,

[GOU20]  
p. 159

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) dt$$

**Exemple 39.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{c}{\sqrt{-\ln(x)}} \sim \frac{c}{\sqrt{1-x}}$$

où  $c = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

## 2. Fonctions définies par une intégrale

**Théorème 40.** Soient  $[a, b[$  un intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  (avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ),  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{R}$ ,  $f : [a, b[ \rightarrow E$  et  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  deux applications continues par morceaux sur  $[a, b[$ .

- (i) Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge, alors quand  $x \rightarrow b^-$ ,
- Si  $f(t) = O(g(t))$ , alors  $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ .
  - Si  $f(t) = o(g(t))$ , alors  $\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ .
  - Si  $f(t) \sim g(t)$ , alors  $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$ .
- (ii) Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, alors quand  $x \rightarrow b^-$ ,
- Si  $f(t) = O(g(t))$ , alors  $\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ .
  - Si  $f(t) = o(g(t))$ , alors  $\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ .
  - Si  $f(t) \sim g(t)$ , alors  $\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$ .

p. 163

**Exemple 41.** Lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = o\left(\int_1^x t^{\alpha-1} dt\right) = o(x^\alpha)$$

pour tout  $\alpha > 0$ .

**Application 42.** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $+\infty$  et que lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \sim \frac{\mu}{x}$$

pour  $\mu \notin \{-1, 0\}$ . Alors,

- (i) Si  $\mu > -1$ ,  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  diverge et  $\int_a^x g(t) dt \sim \frac{xg(x)}{\mu+1}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- (ii) Si  $\mu < -1$ ,  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  converge et  $\int_x^{+\infty} g(t) dt \sim -\frac{xg(x)}{\mu+1}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exemple 43.** Lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{i=1}^k \frac{x}{\ln(x)^i} (i-1)! + o\left(\frac{x}{\ln(x)^k}\right)$$

p. 173

**Proposition 44.** La fonction  $\Gamma$  définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  vérifie :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

[ROM21]  
p. 364

(ii)  $\Gamma(1) = 1$ .

(iii)  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

De plus,

$$\forall x \in ]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

(que l'on peut étendre à  $\mathbb{R}_*^+$  entier).

**Théorème 45** (Formule de Stirling généralisée).

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

[GOU20]  
p. 166

# Bibliographie

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Oraux X-ENS Mathématiques**

[FGN3]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3*. 3<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 mai 2020.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html>.

## **De l'intégration aux probabilités**

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

**Petit guide de calcul différentiel**

**[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.