223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Convergence des suites numériques

1. Limite d'une suite

Définition 1. Soit E un ensemble non vide. On appelle **suite** à valeurs dans E toute application $u : D \to E$ où D est une partie de $\mathbb{N}$. Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$), on dit que u est **réelle** (resp. **complexe**). Dans ces deux cas, on parle de **suite numérique**. [AMR11] p. 1

On fixe, pour tout le reste de la leçon, (u_n) une suite numérique à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 2. p. 12

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq A$ (resp. $A \leq u_n$).
- On dit que (u_n) est **bornée** s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq A$ (resp. $A \leq u_n$). Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela revient à dire que (u_n) est majorée et minorée.
- On dit que (u_n) admet $\ell \in \mathbb{K}$ pour **limite** (ou **converge** / **tend** vers ℓ) si,
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon$$
On le note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \ell$.
- On dit que (u_n) est **convergente** si elle admet une limite. Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

Exemple 3. Si (u_n) est définie par
$$\forall n \geq 1,\ u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$
alors (u_n) converge vers 1.

Théorème 4. On a unicité de la limite dans $\mathbb{K}$.

Proposition 5. Toute suite numérique convergente est bornée.

Contre-exemple 6. $((-1)^n)$ est bornée, non convergente.

Proposition 7. Soit (v_n) une suite numérique bornée. On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Proposition 8. On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \in \mathbb{K}$. Soit (v_n) une suite numérique qui converge vers $\ell_2 \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2$.

(iv) Si $\ell_2 \neq 0$, on a $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Définition 9. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. p. 20

— On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n \geq A$$

— On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.

On a les mêmes notations qu'à la Définition 2.

Proposition 10. On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(i) (u_n) est minorée.

(ii) (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

(iii) Soit (v_n) une suite numérique.

— Si (v_n) est convergente ou $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

— Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Exemple 11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, p. 29

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Convergence de suites réelles

Le résultat suivant justifie de se ramener au cas réel lors de l'étude de la convergence des suites numériques. p. 20

Proposition 12. Soient $(x_n), (y_n)$ deux suites réelles et x, y deux réels. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + iy_n = x + iy \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n & = x \\ \lim_{n\to+\infty} y_n & = y \end{cases}$$

On se place pour le restant de la sous-section dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème 13 (des gendarmes)**.** Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de même limite $\ell \in \mathbb{R}$ telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Alors, $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \ell$.

Définition 14. (u_n) est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$). Elle est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 15 (de la limite monotone)**.** Si (u_n) est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Théorème 16 (Suites adjacentes)**.** Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (ie. (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et la suite différence tend vers 0), alors elles sont convergentes de même limite ℓ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Exemple 17. Les suites $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ sont adjacentes et convergent vers 1.

Corollaire 18 (Segments emboîtés)**.** Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que p. 36

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \\ (b_n - a_n) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Alors, il existe un nombre réel unique ℓ tel que $\bigcap_{n\geq 0} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Application 19 (Critère de Leibniz)**.** Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissantes, p. 97

tendant vers 0. Alors

$$\sum(-1)^n a_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$$

(voir Section 2.)

Définition 20. Pour cette définition, on ne suppose pas au cas réel. p. 25

— On dit que (u_n) est **négligeable** devant une suite réelle positive (α_n) et on note $u_n = o(\alpha_n)$ si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon \alpha_n$$

— On dit que (u_n) est **équivalente** à une suite numérique (v_n) et on note $u_n \sim v_n$, si $(u_n - v_n)$ est négligeable devant $(|u_n|)$.

Proposition 21. En reprenant les notations précédentes,

(i) On suppose (α_n) non nulle à partir d'un certain rang. (u_n) est négligeable devant α_n si et seulement si $\frac{u_n}{\alpha_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

(ii) On suppose (v_n) non nulle à partir d'un certain rang. (u_n) est équivalente à v_n si et seulement si $\frac{u_n}{\alpha_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$.

(iii) $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$.

Exemple 22 (Formule de Stirling)**.** p. 353

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Proposition 23. Deux suites convergentes équivalentes ont la même limite. p. 28

3. Suites de Cauchy

Définition 24. On dit que (u_n) est **de Cauchy** si p. 34

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Proposition 25. (i) Une suite convergente est de Cauchy.

(ii) Une suite de Cauchy est bornée.

Théorème 26. Toute suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Contre-exemple 27. La série $\sum \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ non convergente dans $\mathbb{Q}$. **[HAU]** p. 312

4. Convergence au sens de Cesàro

Définition 28. À toute suite numérique (u_n) on y associe sa suite (v_n) des **moyennes de Cesàro** où **[AMR11]** p. 53

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Théorème 29. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors sa suite des moyennes de Cesàro converge vers ℓ. On dit que (u_n) converge **au sens de Cesàro**.

Exemple 30.
— Soit (v_n) une suite numérique dont aucun terme n'est nul, qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors,

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}} \longrightarrow_{n \to +\infty} \frac{1}{\ell}$$

converge vers $\frac{1}{\ell}$.

— Soit (w_n) une suite numérique telle que $(w_{n+1} - w_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\frac{w_n}{n} \longrightarrow_{n \to +\infty} \ell$$

Remarque 31. La réciproque du Théorème 29 est fausse.

Exemple 32. $(-1)^n$ converge au sens de Cesàro vers 0, mais pas au sens usuel.

II - Valeurs d'adhérence

1. Suites extraites

Définition 33. On appelle **sous-suite** ou **suite extraite** de (u_n), toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (on dit que φ est une **extractrice**). p. 14

Proposition 34. Si une suite converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors toute suite extraite converge vers ℓ.

Définition 35. On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite numérique, tout élément de $\mathbb{K}$ limite d'une de ses sous-suites convergentes.

Remarque 36.
— Toute suite numérique convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.
— Une suite possédant une unique valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

Exemple 37. $((1-(-1)^n)n)$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence, mais ne converge pas.

p. 36

Théorème 38 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite numérique bornée possède au moins une sous-suite convergente.

[DAN] p. 73

Proposition 39. Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

[I-P] p. 116

Application 40. Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit (v_n) une suite de E telle que $d(v_n, v_{n-1}) \longrightarrow 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (v_n) est connexe.

Corollaire 41 (Lemme de la grenouille)**.** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et (x_n) une suite de $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors (x_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

2. Limites inférieure et supérieure

On se place dans le cas réel pour toute cette sous-section.

[AMR11] p. 93

Lemme 42. Si (u_n) n'est pas bornée, on peut extraire une sous-suite qui tend vers $\pm\infty$: $\pm\infty$ est une valeur d'adhérence de (u_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 43. On appelle **limite inférieure** (resp. **limite supérieure**) de (u_n), notée $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ (resp. $\liminf_{n\to+\infty} u_n$) la plus grande (resp. plus petite) de ses valeurs d'adhérence.

[DAN] p. 77

Proposition 44. (u_n) converge si et seulement si $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n$.

III - Suites particulières

1. Suites récurrentes

Définition 45. Soit $E \subseteq \mathbb{K}$. On dit que (u_n) est **récurrente** d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ si on peut écrire [GOU20] p. 200

$$\forall n \geq h,\ u_{n+h} = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h}) \qquad (*)$$

où $f : E^h \to E$ et les premières valeurs $u_0, \dots, u_{h-1} \in E$ étant donnés.

Théorème 46 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** En reprenant les notations précédentes, une fonction $g : E \to \mathbb{K}$ est continue si et seulement si pour toute suite numérique convergente $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ dont on note ℓ la limite, $g(v_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} \ell$. [AMR11] p. 38

Corollaire 47. Si une suite récurrente d'ordre 1 (dont on note f la fonction) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple 48. La suite (u_n) définie par $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sin(u_n)$ converge vers 0.

[DEV] **Application 49** (Méthode de Newton)**.** Soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction [ROU] p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $g' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c,d]$ tel que $g(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 50. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus g strictement convexe sur $[c,d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a,d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 51. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.
— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Séries numériques

Définition 52. — On appelle **série** de terme général u_n la suite (S_n) définie par [GOU20] p. 208

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \dots + u_n$$

On note cette série $\sum u_n$.
— u_n s'appelle le **terme** d'indice n.
— S_n s'appelle la **somme partielle** d'indice n.

Définition 53. En reprenant les notations précédentes, on dit que $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la **somme** de la série, et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 54. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. [AMR11] p. 81

Contre-exemple 55. La réciproque est fausse, par exemple en considérant la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Proposition 56. Muni des opérations :
— $\forall (u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$,
— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \sum u_n = \sum (\lambda u_n)$,
l'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.

Proposition 57 (Règle de d'Alembert)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle [GOU20] p. 214

que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple 58. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge. [AMR11] p. 94

Exemple 59. $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{n!}$ donne une valeur approchée de e à moins de 3×10^{-8} près par défaut. p. 108

Proposition 60 (Règle de Cauchy)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que [GOU20] p. 214

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple 61. $\sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$ converge. [AMR11] p. 112

Lemme 62. Soit $\alpha > 1$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a [I-P] p. 380

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

[DEV] **Proposition 63** (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Bibliographie

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions **[AMR11]**

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les Contre-Exemples en Mathématiques **[HAU]**

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2e éd. Ellipses, 13 juin 2007.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.