221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités

1. Définitions

[GOU20] p. 373

Définition 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace de Banach et $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E^n$ un ouvert. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to E$ une fonction.

— On appelle **équation différentielle** une équation de la forme

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{$*$}$$

(ie. une équation portant sur les dérivées d'une fonction.)

— Toute application $\varphi : I \to E$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) n fois dérivable vérifiant :
  (i) $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$;
  (ii) $\forall t \in I$, $F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t)$;

est une **solution** de $(*)$. On note $\mathscr{S}_*$ l'ensemble des solutions de $(*)$.

— Une solution $\varphi : I \to E$ de $(*)$ est dite **maximale** s'il n'existe pas d'autre solution $\psi : J \to E$ (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$) de $(*)$ telle que $I \subseteq J$, $I \neq J$ et $\psi = \varphi$ sir I.

— On appelle **problème de Cauchy** de $(*)$ en $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ la recherche d'une solution $\varphi : I \to E$ de $(*)$ vérifiant

$$\forall t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

p. 377

Définition 2. Toute équation différentielle sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre $p \geq 1$ du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t) Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t) Y + B(t) \tag{L}$$

(où $A_{p-1}, \dots, A_0$ sont des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ est une fonction continue) est appelée **équation différentielle linéaire** d'ordre p.

Si de plus $B = 0$, alors (L) est qualifiée d'**homogène**.

Définition 3. Si $n \geq 2$, on parle de **système différentiel linéaire**. Si $n = 1$, on parle d'équation différentielle linéaire **scalaire**.

Remarque 4. L'équation (L) précédente peut aussi s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons ramené l'équation différentielle linéaire (L) d'ordre p à une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Donc, pour cette raison, on peut se limiter à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

2. Structure de l'ensemble des solutions

[DEV] **Théorème 5** (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soient $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy [DAN] p. 520

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Remarque 6 (Version linéaire d'ordre p). Soient $A_{p-1}, \dots, A_0$ des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ une fonction continue. Soients $X_0, \dots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^n$. Alors, $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy [GOU20] p. 378

$$\begin{cases} Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \\ Y^{(k)}(t_0) = X_k & \forall k \in [\![1, p-1]\!] \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Exemple 7. Considérons l'équation $y' - y = 0$. Comme la fonction nulle est solution maximale, il s'agit de l'unique solution qui s'annule sur $\mathbb{R}$. [ROM19-1] p. 402

Corollaire 8. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p défini sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension np. [GOU20] p. 278

Corollaire 9. Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène associée à une équation différentielle linéaire (L) et soit $V_0 \in \mathcal{S}_L$. Alors $\mathcal{S}_L = V_0 + \mathcal{S}_H$, et $\mathcal{S}_L$ est un espace affine de même dimension que $\mathcal{S}_H$.

3. Wronskien

Définition 10. Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H) définies sur un intervalle I. On appelle **wronskien** de $V_1, \dots, V_n$ l'application

$$W_{(V_1,\dots,V_n)} : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{array}$$

Exemple 11. Soient $v_1, \dots, v_p$ p solutions de $y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y$ définies sur un intervalle I (où $\forall i$, $a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue). Alors

$$\forall t \in I, W_{(v_1,\dots,v_p)}(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & \dots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Exemple 12. Soient u et v deux solutions de $y'' = a(t)y' + b(t)y$ définies sur un intervalle I. Alors

$$\forall t \in I, W_{(u,v)}(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$$

Proposition 13. Le rang de n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène $V_1(t), \dots, V_n(t)$ est indépendant de t.

Corollaire 14. Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H). Alors $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de $\mathcal{S}_H$ si et seulement si $\exists t_0$ tel que $W_{(V_1,\dots,V_n)}(t_0) \neq 0$.

Proposition 15. Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (H). Alors $W_{(V_1,\dots,V_n)}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène p. 388

$$Y' = \mathrm{trace}(A)Y$$

et pour tout t_0 élément de I, on a $\forall t \in I$, $W_{(V_1,\dots,V_n)}(t) = W_{(V_1,\dots,V_n)}(t_0)\exp(\int_{t_0}^t \mathrm{trace}(A(u))\,\mathrm{d}u)$.

II - Résolution

1. Cas d'une équation différentielle linéaire scalaire

Proposition 16. Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire $y' = a(t)y$ sont proportionnelles à $t \longmapsto e^{A(t)}$ où A est une primitive de a. p. 379

Corollaire 17 (Variation de la constante)**.** Soient $(L) : y' = a(t)y + b(t)$ une équation différentielle linéaire scalaire et A une primitive de a. Alors,

$$\mathscr{S}_L = \left\{ t \longmapsto \lambda(t)e^{A(t)} \mid \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \right\}$$

Exemple 18. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(L) : y' + y = \sin(t)$ est

$$\mathscr{S}_L = \left\{ t \longmapsto \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2} + \mu e^{-t} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 19. À cause du principe de "recollement" des solutions, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ de $(1-t^2)y' + ty = 0$ est la fonction nulle.

2. Cas d'un système différentiel linéaire

Proposition 20. Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = A(t)Y$. Alors,

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Corollaire 21 (Variation de la constante)**.** Soit $(L) : Y' = A(t)Y + B(t)$ une équation différentielle linéaire. On note par (H) le équation différentielle linéaire homogène associée. Alors, si $V_1, \dots, V_n$ sont n solutions de (H), on a :

$$\mathscr{S}_L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) V_i \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) V_i(t) = B(t) \right\}$$

Exemple 22. Soit $(L) : y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$. On note u et v deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée. Alors,

$$\mathscr{S}_L = \left\{ t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t) \mid \begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = c \end{cases} \right\}$$

Exemple 23. On considère l'équation différentielle $(L) : y'' + y = \tan(t)$. Alors,

$$\mathscr{S}_L = \left\{ t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - \cos(t) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Cas où les coefficients sont constants

Définition 24. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

l'**exponentielle** de la matrice A.

Proposition 25. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est constante en t) a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA} y_0$.

Remarque 26. En reprenant les notations précédentes, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut réduire A dans $\mathbb{C}$ puis écrire les solutions de (H) sous la forme $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$ (où φ est une solution complexe de (H)).

Corollaire 27. On considère une équation différentielle linéaire homogène $(H) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$. On factorise P_H, le **polynôme caractéristique** de l'équation dans $\mathbb{C}$,

$$P_H = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{k} (X - r_i)^{m_i}$$

Alors,

$$\mathscr{S}_H = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t) \right\}$$

où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

Exemple 28. On considère l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$. Soient r_1 et r_2 les deux racines de P_H dans $\mathbb{C}$.

— Si $r_1 \neq r_2$, $\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$.

— Si $r_1 = r_2$, $\mathscr{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt} \mid \lambda, \mu \in K\}$.

4. Quelques autres techniques de résolution

a. Abaissement de l'ordre

Proposition 29. On considère une équation différentielle linéaire homogène $(H) : y^{(n)} = a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y$. Soit $\varphi \in \mathscr{S}_H$, alors $f = g\varphi$ est solution de (H) si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} g^k \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^k \varphi^{(n-1-k)} + \dots + a_1(t)(g'\varphi)$$

ie. g' est solution d'une équation différentielle d'ordre $n-1$.

Exemple 30. Soit φ une solution de $(H) : y'' = a(t) y' + b(t) y$, alors $f = g\varphi$ est solution de (H) si et seulement si $2g'\varphi' + g''\varphi = a(t) g' \varphi$.

b. Utilisation des séries entières

Proposition 31. Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ et b des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ développables en série entière sur un intervalle ouvert $]-R, R[$ (R étant un réel strictement positif). Soient $y_0, \dots, y_{p-1} \in \mathbb{C}$. On considère le problème de Cauchy : [ROM19-1] p. 401

$$\begin{cases} y^{(p)} = a_0(t) y + \dots + a_{p-1}(t) y^{(p-1)} + b(t) & \\ y^{(k)}(0) = y_k & \forall k \in [\![0, p-1]\!] \end{cases} \qquad (*)$$

Alors $(*)$ admet une unique solution développable en série entière sur $]-R, R[$.

Exemple 32. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [1, 1]$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

p. 412

Application 33. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in]-1,1[, f_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

III - Études qualitatives

Lemme 34 (Grönwall)**.** Soient $\varphi, \psi, y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) \left| \int_a^t \psi(s) y(s) \, \mathrm{d}s \right|$. Alors, [GOU20] p. 397

$$\forall t \in I, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) \, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

Corollaire 35. Soient $\varphi, y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continues et vérifiant $\exists c \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s) y(s) \, \mathrm{d}s$. Alors,

$$\forall t \in [a,b], y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \varphi(s) \, \mathrm{d}s\right)$$

Application 36. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ croissante de classe $\mathscr{C}^1$. Alors les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 37 (Floquet)**.** On considère l'équation $(H) : Y' = A(t)Y$ où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et T-périodique. Alors, (H) admet une solution V non nulle telle que p. 387

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, V(t+T) = \lambda V(t)$$

Théorème 38 (Massera)**.** Si l'équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ (où A et B sont T-périodiques) admet une solution bornée sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une solution T-périodique. p. 406

IV - Applications

1. Résolution d'équations différentielles non linéaires

Application 39 (Équations de Bernoulli)**.** Soit $(B) : y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$). On pose $z = y^{1-\alpha}$ et on a p. 391

$$(B) \iff \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t)z + b(t)$$

Corollaire 40 (Équations de Ricatti)**.** Soit $(R) : y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ qui admet pour solution particulière φ_0. On pose $y = \varphi_0 + z$ et on a

$$(R) \iff (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))z + a(t)z^2$$

qui est une équation de Bernoulli.

Exemple 41. Les solutions maximales de l'équation $y' + y + y^2 + 1 = 0$ sont de la forme $t \longmapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)}+i}$, définies que des intervalles ouverts de longueur $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

2. Stabilité

Application 42 (Théorème de stabilité de Liapounov)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$. On considère le problème de Cauchy [I-P] p. 302

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si toute valeur propre complexe de $\mathrm{d}f_0$ est de partie réelle strictement négative, alors $\forall y_0$ suffisamment proche de 0, la solution maximale $y(t)$ est bien définie et converge vers 0 en $+\infty$ à une vitesse exponentielle.

3. Étude d'équations fonctionnelles et matricielles

Application 43. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t > 0, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $t^2y'' + y = 0$. [GOU20] p. 384

Lemme 44. Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t}P(t)$. [I-P] p. 177

[DEV] **Application 45** (Équation de Sylvester)**.** Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation [DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête [GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques [I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Éléments d'analyse réelle [ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.