

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

I - Existence et unicité

Définition 1. Soient U un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

[R-R]
p. 210

— On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en $a \in U$ si

$$\exists r > 0 \text{ tel } \forall x \in B(a, r), f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } f(x) \geq f(a))$$

— On dit que f admet un **extremum local** en $a \in U$ si elle admet un minimum ou un maximum local.

1. Utilisation de la compacité

Théorème 2 (Des bornes). Soient E un espace compact et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe deux éléments a et b de E vérifiant

[GOU20]
p. 31

$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x) \text{ et } f(b) = \sup_{x \in E} f(x)$$

Contre-exemple 3. La fonction

[HAU]
p. 202

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} \frac{(-1)^q(q-1)}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ avec } \frac{p}{q} \text{ le représentant irréductible de } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est minorée par -1 , majorée par 1 , mais n'atteint ses bornes sur aucun intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} .

Corollaire 4. Soient (E, d) un espace métrique et K_1, K_2 deux compacts de E . Alors,

[GOU20]
p. 33

$$\exists (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2 \text{ tel que } d(x_1, x_2) = \inf_{(x,y) \in K_1 \times K_2} d(x, y)$$

Corollaire 5 (Point fixe dans un compact). Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ telle que

[ROU]
p. 171

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

alors f admet un unique point fixe et pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers ce point fixe.

Exemple 6. \sin admet un unique point fixe sur $[0, 1]$.

Contre-exemple 7. La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est continue, contractante et sans point fixe.

[GOU20]
p. 35

Corollaire 8 (Théorème de Heine). Une application continue sur un compact Y est uniformément continue.

p. 31

Application 9 (Théorème de d'Alembert-Gauss). Tout polynôme non constant de \mathbb{C} admet une racine dans \mathbb{C} .

[DAN]
p. 58

2. Utilisation de la convexité

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point.

Proposition 10. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

[ROM19-1]
p. 234

Contre-exemple 11. La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

Proposition 12. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α .

Proposition 13. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

3. Utilisation de l'holomorphie

Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

[QUE]
p. 102

Proposition 14 (Inégalités de Cauchy). On suppose f holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a, R)$. On note c_n les coefficients du développement en série entière de f en a . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, R], |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Corollaire 15 (Théorème de Liouville). On suppose f holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. Si f est bornée, alors f est constante.

Théorème 16 (Principe du maximum). On suppose Ω borné et f holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$. On note M le sup de f sur la frontière (compacte) de Ω . Alors,

p. 107

$$\forall z \in \Omega, |f(z)| \leq M$$

4. Utilisation de propriétés hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.

[LJ]
p. 32

Lemme 17 (Identité du parallélogramme).

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

[DEV]

Théorème 18 (Projection sur un convexe fermé). Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C** . Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

Théorème 19. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H , alors P_F est une application linéaire continue. De plus, pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Application 20. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

Application 21 (Théorème de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $\|\varphi\| = \|y\|$.

Corollaire 22.

$$\forall T \in H', \exists ! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors $U = T^*$: c'est l'**adjoint** de T . On a alors $\|T\| = \|T^*\|$.

Application 23. Soit $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et vérifiant

$$\forall (x_k) \in H^\mathbb{N} \text{ telle que } \|x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty \text{ alors } J(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

Alors, il existe $a \in H$ tel que

$$J(a) = \inf_{h \in H} J(h)$$

[I-P]
p. 336

II - Extrema et calcul différentiel

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en un point a de U , où U est un ouvert de \mathbb{R}^n .

1. Condition du premier ordre

Définition 24. Si $df_a = 0$, on dit que a est un **point critique** de f .

[R-R]
p. 210

Remarque 25. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles de f s'annulent en a .

Proposition 26. Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Contre-exemple 27. $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ a un point critique en $(0, 0)$, mais n'a pas d'extremum en $(0, 0)$.

[HAU]
p. 281

2. Condition du second ordre

On suppose f de classe \mathcal{C}^2 sur U .

[GOU20]
p. 336

Définition 28. La matrice **hessienne** de f en a , notée $\text{Hess}(f)_a$, est définie par

$$\text{Hess}(f)_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in [1,n]}$$

Remarque 29. Pour f de classe \mathcal{C}^2 , $\text{Hess}(f)_a$ est symétrique.

Théorème 30. On suppose $df_a = 0$. Alors :

- (i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a , $\text{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).
- (ii) Si $\text{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .

Exemple 31. On suppose $df_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{i+j=2}$. Alors :

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .
- (ii) Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- (iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 32. La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 33. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

3. Extrema liés

Théorème 34 (Extrema liés). Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

p. 337

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

Définition 35. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

Remarque 36. La relation finale du Théorème 34 équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(df_a)$$

et elle exprime que df_a est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

[BMP]
p. 21

Contre-exemple 37. On pose $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x, y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 34 n'est pas vraie.

Application 38 (Théorème spectral). Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

Application 39.

$$\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \text{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{trace}({}^t M M)}$ (ie. $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

p. 35

Application 40 (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

[GOU20]
p. 339

Application 41 (Inégalité d'Hadamard).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

[ROU]
p. 409

III - Algorithmes d'optimisation numérique

1. Méthode de Newton

Théorème 42 (Méthode de Newton). Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

- (i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.
- (ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ .
- (iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 43. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

- (i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).
- (ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 44. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre \sqrt{y} .

— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Lien avec les systèmes linéaires

Proposition 45. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$. Alors, minimiser f sur \mathbb{R}^n revient à résoudre le système linéaire $Ax = b$.

[ROU]
p. 152

[BMP]
p. 24

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les Contre-Exemples en Mathématiques

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2^e éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Analyse complexe et applications

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.

Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.