214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Soient E et F deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert.

I - Théorème d'inversion locale

1. Difféomorphisme

Pour une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on sait que si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f admet un inverse global f^{-1} qui vérifie [GOU20] p. 341

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

L'objectif ici va être de généraliser ce résultat.

Définition 1. Soit $f : U \to F$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe $\mathscr{C}^k$ de U sur $V = f(U)$ si f et f^{-1} sont bijectives et de classe $\mathscr{C}^k$ respectivement sur U et V. [ROU] p. 54

Proposition 2. On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to F$ un difféomorphisme. Alors :

(i) Pour tout $x \in U$, en posant $y = f(x)$,

$$\mathrm{d}(f^{-1})_y \circ \mathrm{d}f_x = \mathrm{id}$$

(ii) $n = p$.

Exemple 3. $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme.

2. Énoncé

Théorème 4 (Inversion locale)**.** Soit $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f_a$ est inversible. [GOU20] p. 341

Alors, il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W.

Remarque 5. Si $E = F = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_a$ est inversible si et seulement si le jacobien de f en a, $\det \mathrm{Jac}(f)_a$, est non nul.

Corollaire 6. Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f_a$ est inversible. Alors f est une application ouverte.

Exemple 7. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. p. 347

Application 8. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, $V = \varphi(U)$ est mesurable et tout fonction f appartient à L_1 si et seulement si $|\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f \circ \varphi$ appartient à L_1. Dans ce cas, [BMP] p. 9

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U |\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f(\varphi(y))\,\mathrm{d}y$$

Exemple 9. En passant en coordonnées polaires, [GOU20] p. 355

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Application 10. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. Alors, si A est suffisamment proche de l'identité I_n, A est une racine k-ième (ie. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$). [BMP] p. 9

3. Généralisation

Théorème 11 (Inversion globale)**.** Soit $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de U sur $V = f(U)$ si et seulement si f est injective sur U et $\mathrm{d}f_a$ est un isomorphisme pour tout $a \in U$. p. 13

Exemple 12. L'application de l'Exemple 7 n'est pas un difféomorphisme global. [GOU20] p. 347

Remarque 13. Il existe une version holomorphe de ce théorème : [ROU] p. 191

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe sur U. On suppose f injective sur U. Alors, $V = f(U)$ est un ouvert (connexe) de $\mathbb{C}$ et f est un difféomorphisme holomorphe de classe $\mathscr{C}^1$ de U sur V.

Remarquons que seule l'injectivité de f suffit.

p. 231

Théorème 14 (du rang constant)**.** On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que le rang de $\mathrm{d}f_x$ est constant égal à $r \leq n$ pour tout $x \in U$. Soit $a \in U$. Alors, il existe V voisinage de a, W voisinage de $f(a)$ et deux difféomorphismes $\phi : V \to V$ et $\psi : W \to W$ tels que

$$\phi \circ f \circ \psi = \pi_r$$

où π_r désigne la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^r$: $\pi_r : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, 0, \dots, 0)$.

II - Théorème des fonctions implicites

1. Énoncé

Définition 15. Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ouvert où $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Soit $f : \Omega \to F$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est définie sur un voisinage de a_i dans E_i. Si elle est différentiable en a_i, on dit que f admet une **différentielle partielle** d'indice i en a, et on note celle-ci $\partial_i f_a$. [GOU20] p. 344

Remarque 16. En reprenant les notations précédentes :

- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = \mathbb{R}$ et $F = E = \mathbb{R}^n$, alors $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- Si f est différentiable en a, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\partial_i f_a$ existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E,\ \mathrm{d}f_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i)$$

Théorème 17 (des fonctions implicites)**.** Soient E, F, G trois espaces de Banach. Soient $U \times V \subseteq E \times F$ où U et V sont des ouvertes. Soit $f : U \times V \to G$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f_{(a,b)} : F \to G$ est un isomorphisme. Alors, il existe :

- Un voisinage ouvert U_0 de a dans U.
- Un voisinage ouvert W de $f(a, b)$.
- Un voisinage ouvert Ω de (a, b) dans $U \times V$.
- Une fonction $\varphi : U_0 \times W \to V$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0,\ \forall z \in W,\ \exists! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W,\ f(x, \varphi(x, z)) = z$$

Remarque 18. Avec les notations précédentes, si $E = F = \mathbb{R}$, on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir [BMP] p. 11

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Remarque 19. La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation $f(x,y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction φ. [ROU] p. 193

Proposition 20. Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite φ est donnée par :

$$d\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x,\varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x,\varphi(x))})$$

2. Exemples

Exemple 21. Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\partial_2 f_{(x,y)} = 2y$. On exclue les points où $y = 0$. En prenant $(0,1)$ et $(0,-1)$ pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

— $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$.

— $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

De plus, en dérivant par rapport à x : $2x + 2yy' = 0$ et, $y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{y}$.

Exemple 22 (Folium de Descartes)**.** Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. En tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})\}$, C peut être vu comme le graphe d'une fonction φ telle que p. 237

$$\varphi'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$$

Exemple 23. Soit $f : (x,y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$. Alors, il existe U, V deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}$, $y = \varphi(x) \in V$ est l'unique solution de $f(x,y) = 0$. De plus, on a un développement limité de φ : [GOU20] p. 348

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - x^9 - \frac{x^{10}}{40} + o(x^{11})$$

III - Applications

1. Homéomorphismes

Lemme 24. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que [ROU] p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

[DEV] **Lemme 25** (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Exemple 26. On considère $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation p. 334

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

Application 27. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 : p. 341

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

[BMP] p. 15

Application 28. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $\mathrm{d}f_0 = 0$ et $\mathrm{d}^2 f_0$ est définie positive. Alors 0 est un minimum local (strict) de f.

2. Optimisation

Théorème 29 (Extrema liés)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $\mathrm{d}(g_1)_a, \dots, \mathrm{d}(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que [GOU20] p. 337

$$\mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \dots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a$$

Définition 30. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

Remarque 31. La relation finale du Théorème 29 équivaut à [BMP] p. 21

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\mathrm{d}(g_i)_a) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_a)$$

et elle exprime que $\mathrm{d}f_a$ est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

Contre-exemple 32. On pose $g : (x,y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x,y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0,0)$, la différentielle de g en $(0,0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 29 n'est pas vraie.

Application 33 (Théorème spectral)**.** Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

Application 34. p. 35

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|.\| : M \mapsto \sqrt{\mathrm{trace}({}^t M M)}$ (ie. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

[GOU20] p. 339

Application 35 (Inégalité arithmético-géométrique)**.**

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Application 36 (Inégalité d'Hadamard)**.** [ROU] p. 409

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

3. Régularité des racines d'un polynôme

Proposition 37. Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine simple de P_0. Alors, il existe φ une application $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 telle que [BMP] p. 11

$$\forall P \in U, \forall x \in V, x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$$

Application 38. Soit $\mathscr{S}_{rs}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Alors, $\mathscr{S}_{rs}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Lemme 39. [I-P] p. 396

(i) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(ii) exp est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

(iii) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

[DEV] **Théorème 40.** $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 41. $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Annexes

[BMP] p. 10

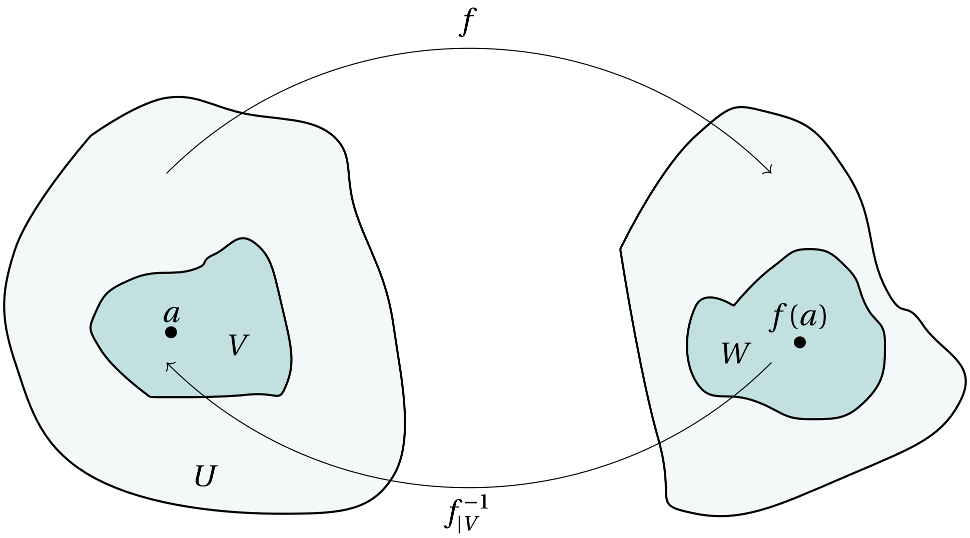

Figure 1 – Inversion locale.

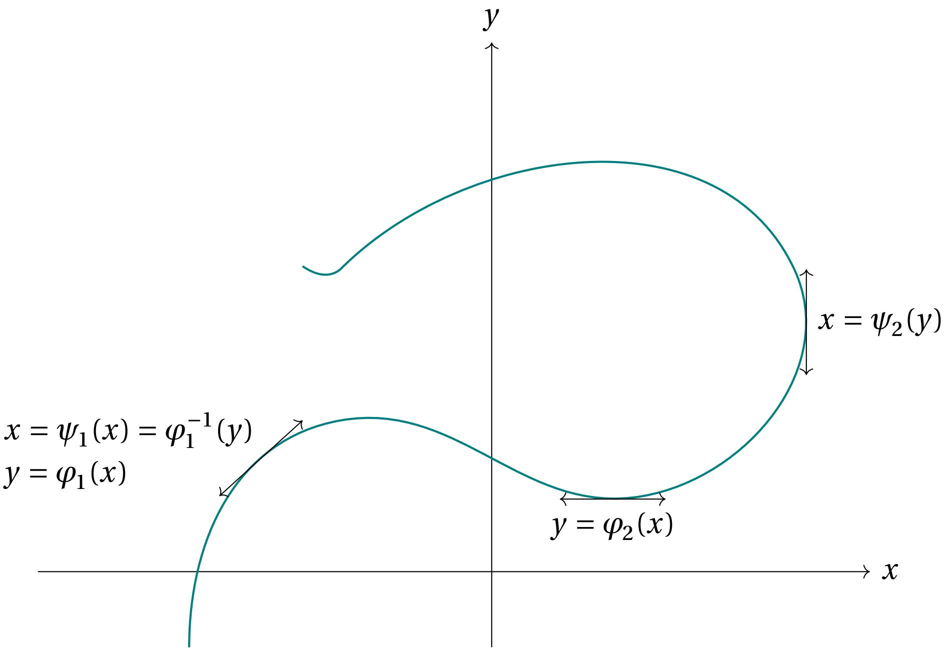

Figure 2 – Fonctions implicites.

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005. https://objectifagregation.github.io.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015. https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.