171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n.

I - Formes quadratiques réelles

1. Définitions

[GOU21] p. 239

Définition 1. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une application.

- On dit que φ est une **forme bilinéaire** sur E si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y)$ sont linéaires.
- Si de plus $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$, on dit que φ est **symétrique**.

Définition 2. On appelle **forme quadratique** sur E toute application q de la forme

$$q : x \mapsto \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E.

Exemple 3. Sur $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ définit une forme quadratique.

Proposition 4. Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. φ est la **forme polaire** de q, et on a

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

p. 248

Exemple 5. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto \operatorname{trace}(A)^2$ est une forme quadratique, dont la forme polaire est $(A, B) \mapsto \operatorname{trace}(A)\operatorname{trace}(B)$.

2. Représentation matricielle

Définition 6. Soient q une forme quadratique sur E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle **matrice** de q dans $\mathscr{B}$ la matrice $\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B})$ définie par p. 229

$$\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j \in [\![1,n]\!]}$$

où φ est la forme polaire de q. Le **rang** de q désigne le rang de cette matrice.

Exemple 7. La matrice de la forme quadratique de l'Exemple 3 est

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 8. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E dont on note P la matrice de passage entre ces bases. Soit q une forme quadratique sur E. Alors,

$$\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}) = {}^t P \operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}') P$$

Remarque 9. En particulier, en reprenant les notations précédentes, $\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B})$ et $\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}')$ sont équivalentes : le rang de q est bien défini et ne dépend pas de la base considérée.

II - Orthogonalité et isotropie

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Définition 10. — On appelle **cône isotrope** de q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

— q est dite **définie** si $C_q = \{0\}$.

— Les vecteurs de C_q sont dits **isotropes** pour q.

Exemple 11. La forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $(x, y, z) \mapsto 4x^2 + 3y^2 + 5xy - 3xz + 8yz$ n'est pas définie car $(0, 0, 1)$ est un vecteur isotrope non nul. [GRI] p. 303

Définition 12. — Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits q-**orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$. On note cela $x \perp y$. [GOU21] p. 242

— Si $A \subseteq E$, on appelle **orthogonal** de A l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\, x \perp y\}$.

Proposition 13. (i) Si $A \subseteq E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

(ii) Si $A \subseteq E$, $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(iii) Si $A \subseteq B \subseteq E$, $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Définition 14. — On appelle **noyau** de q le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Ker}(q) = E^\perp$$

— On dit que q est **non-dégénérée** si $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$ et **dégénérée** si $\mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.

Proposition 15. On a $\mathrm{Ker}(q) \subseteq C_q$. En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.

Exemple 16. Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est une forme quadratique non dégénérée mais non définie non plus.

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(i) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(q))$.

(ii) $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(q)$.

(iii) Si la restriction de q à F $q_{|F}$ est définie, alors $E = F \oplus F^\perp$.

(iv) Si q est définie, $F = F^{\perp\perp}$.

Proposition 18. Soit A la matrice de q dans une base $\mathscr{B}$. Alors,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(q)$$

Corollaire 19. q est non dégénérée si et seulement si $\det(\mathrm{Mat}(q, \mathscr{B})) \neq 0$ pour une base quelconque $\mathscr{B}$ de E. **[GRI]** p. 296

Exemple 20. Sur $\mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est non dégénérée (car de déterminant -1).

III - Classification

1. Bases orthogonales

Définition 21. Une base de E est dite **q-orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux q-orthogonaux. [GOU21] p. 243

Remarque 22. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base q-orthogonale, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(e_i)$$

Théorème 23. Il existe une base q-orthogonale de E.

Remarque 24. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base q-orthogonale, en posant $\lambda_i = q(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\forall x \in E,\ q(x) = q\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i^*(x))^2$$

où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$.

2. Algorithme de Gauss

Théorème 25 (Méthode de Gauss)**.** On écrit

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

et on cherche à écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

(i) Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,i} \neq 0$. On peut suppose $i = 1$, on pose alors $a = a_{1,1}$. On réécrit q sous la forme :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n) \\ &= a\left(x_1 + \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{2a}\right)^2 + \left(C(x_2, \dots, x_n) - \frac{B(x_2, \dots, x_n)^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

où B est une forme linéaire et C une forme quadratique. On itère alors le procédé avec $C - \frac{B^2}{4a}$.

(ii) Sinon. Si $q = 0$, c'est terminé. Sinon, il existe un $a_{i,j}$ non nul. On peut suppose $(i, j) =$

$(1,2)$, on pose alors $a = a_{1,2}$. On réécrit q sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$

où B et C sont des formes linéaires et D une forme quadratique. En utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} q &= a\left(x_1 + \frac{C}{a}\right)\left(x_2 + \frac{B}{a}\right) + \left(D - \frac{BA}{a}\right) \\ &= \frac{a}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right) + \left(D - \frac{BC}{a}\right) \end{aligned}$$

On itère alors le procédé avec $D - \frac{BC}{a}$.

Exemple 26. Sur $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 - 2y^2 + xz + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} - 2y^2 + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 - \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

3. Signature

Définition 27. q est dite **positive** (resp. **négative**) si pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$).

[DEV]

Théorème 28 (Loi d'inertie de Sylvester)**.**

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } q = \sum_{i=1}^{p} |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$$

où les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et où $p + q \leq n$. De plus, ces entiers ne dépendent que de q et pas de la décomposition choisie.

Le couple (p,q) est la **signature** de q et le rang q est égal à $p + q$.

Remarque 29. En reprenant les notations précédentes, il existe donc une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}(q, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q et I_r la matrice identité de taille r.

Corollaire 30. On note $\mathrm{sign}(q)$ la signature de q. [GRI] p. 310

(i) q est définie positive si et seulement si $\mathrm{sign}(q) = (n, 0)$ si et seulement s'il existe des bases q-orthonormées.

(ii) q est définie négative si et seulement si $\mathrm{sign}(q) = (0, n)$.

(iii) q est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{sign}(q) = (p, n-p)$.

Exemple 31. En reprenant l'Exemple 26, on a $\mathrm{sign}(q) = (1, 2)$: q est de rang 3. [GOU21] p. 247

Proposition 32. Si q est définie, alors ou bien q est positive, ou bien q est négative.

IV - Applications

1. Coniques

On suppose $E = \mathbb{R}^2$ et muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. [GRI] p. 427

a. Aspect algébrique

Définition 33. On appelle **conique** un ensemble

$$\mathscr{C} = \{v \in E \mid q(v) + \varphi(v) = k, \, k \in \mathbb{R}\}$$

où q est une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur E.

On gardera les notations de cette définition pour la suite.

Remarque 34.

— En changeant éventuellement le signe des deux membres de l'équation, on peut supposer que a signature de q est $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(1, 0)$.

— Si (e_1, e_2) est la base de E, avec $v = xe_1 + ye_2$, on trouve que l'équation d'une conique est du type

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k, \, k \in \mathbb{R}$$

Proposition 35. Il existe une base orthogonale (v_1, v_2) pour q et $\langle .,. \rangle$. Dans cette base, l'équation de la conique est du type

$$ax^2 + by^2 - 2rx - 2sy = k,\ k \in \mathbb{R} \tag{E}$$

Définition 36. En reprenant les notations précédentes, les directions définies par v_1 et v_2 sont appelés **directions principales** de la conique.

Théorème 37 (Classification des coniques)**.** (i) Si q est non dégénérée : On peut réécrire l'équation (E) de manière équivalente sous la forme

$$ax^2 + by^2 = h$$

avec $a, b, h \in \mathbb{R}$.

— Si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$: si $h = 0$, $\mathscr{C}$ se réduit à un point ; si $h < 0$, $\mathscr{C} = \emptyset$. Supposons que $h > 0$, alors $\mathscr{C}$ est une ellipse, de centre $\left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)$.

— Si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$: si $h \neq 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Si $h = 0$, $\mathscr{C}$ se réduit aux deux droites d'équation $y = \pm\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}x$.

(ii) Si q est dégénérée : On a $ab = 0$ et sign(q) $= (1,0)$; on peut réécrire l'équation (E) de manière équivalente sous la forme

$$a\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sy = h$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

— Si $s \neq 0$: $\mathscr{C}$ est une parabole.

— Si $s = 0$: si $h = 0$, $\mathscr{C}$ se réduit à la droite $x = 0$; si $h < 0$, $\mathscr{C} = \emptyset$. Supposons que $h > 0$, alors $\mathscr{C}$ est constituée des deux droites parallèles d'équation $x = \pm h$.

b. Aspect géométrique

Proposition 38. En se plaçant dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, plongé dans $\mathbb{R}^3$, une conique est l'intersection d'un cône et d'un plan. **[ROM21]** p. 494

2. En analyse

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

a. Optimisation

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Théorème 39. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors : [GOU20] p. 336

(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $\mathrm{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).

(ii) Si $\mathrm{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Exemple 40. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{i+j=2}$. Alors :

(i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet une minimum (resp. maximum) relatif en a.

(ii) Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a.

(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 41. La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x-y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 42. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

b. Homéomorphismes

Lemme 43. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que [ROU] p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

Lemme 44 (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Application 45. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 : p. 341

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

3. Racines de polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.

[C-G] p. 356

Notation 46. On note :

— $x_1, \dots, x_t$ les racines complexes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_t$.

— $s_0 = n$ et $\forall k \geq 1$, $s_k = \sum_{i=1}^{t} m_i x_i^k$.

Proposition 47. $\sigma = \sum_{i,j \in [\![0, n-1]\!]} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

[DEV]

Théorème 48 (Formes de Hankel)**.** On note (p, q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :

— $t = p + q$.

— Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Annexes

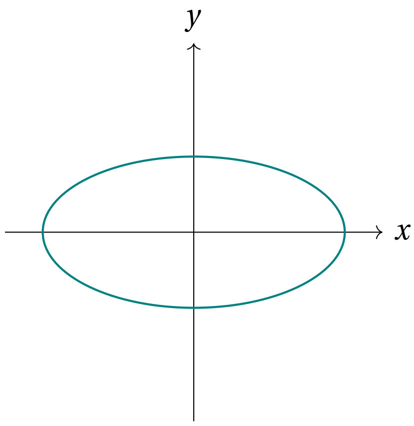

FIGURE 1 – Une ellipse ($\text{sign}(q) = (2,0)$).

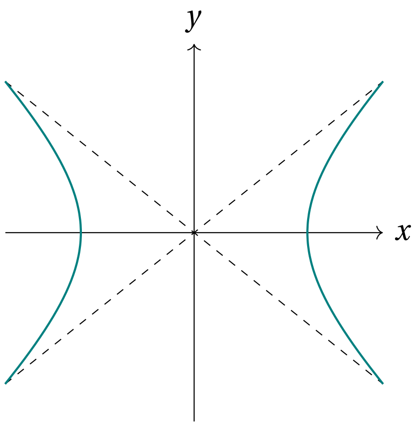

FIGURE 2 – Une hyperbole ($\text{sign}(q) = (1,1)$).

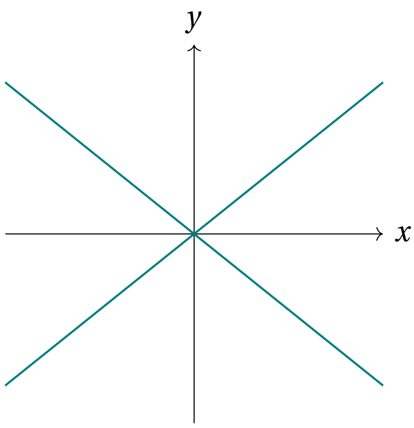

FIGURE 3 – Une hyperbole dégénérée en deux droites sécantes ($\text{sign}(q) = (1,1)$).

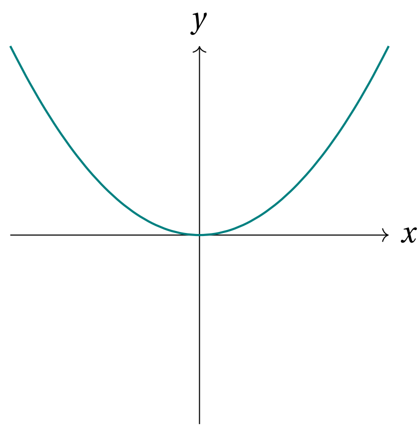

FIGURE 4 – Une parabole ($\mathrm{sign}(q) = (1,0)$).

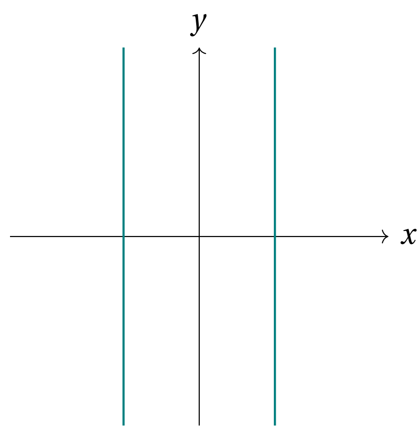

FIGURE 5 – Une parabole dégénérée en deux droites parallèles ($\mathrm{sign}(q) = (1,0)$).

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire*. 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.