155 Exponentielle de matrices. Applications.

I - Construction

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Algèbres de Banach

Lemme 1. Pour tout réel positif a, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente. **[DAN]** p. 278

Définition 2. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre. p. 174

- On dit que $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathscr{A}$ si :
  (i) $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
  (ii) $\forall x, y \in \mathscr{A}$, $\|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$.
- Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{A}$. Si $(\mathscr{A}, \|.\|)$ est un espace vectoriel complet, on dit que $\mathscr{A}$ est une **algèbre de Banach**.

Proposition 3. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Muni de la norme p. 183

$$|||.||| : M \mapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), |||.|||)$ est une algèbre de Banach.

Contre-exemple 4. Ce n'est pas vrai pour n'importe quelle norme : la norme infinie $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une norme d'algèbre.

Proposition 5. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Pour tout élément $A \in \mathscr{A}$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente. p. 278

2. Exponentielle de matrices

Définition 6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **exponentielle** de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A l'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivant : p. 345

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

p. 356

Exemple 7. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $D = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Alors,

$$\exp(D) = \mathrm{Diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$$

Remarque 8. En particulier, $\exp(0) = I_n$. [GRI] p. 378

3. Propriétés

Proposition 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors,

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Corollaire 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $e^A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et,

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$$

Proposition 11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$$

Lemme 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$e^A = \begin{pmatrix} e_1^\lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & e_n^\lambda \end{pmatrix}$$

Proposition 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, [ROM21] p. 762

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{trace}(A)}$$

Proposition 14. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est continue. De plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

II - Calcul pratique

Proposition 15. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice q. Alors, [GOU21] p. 206

$$e^N = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$$

Théorème 16 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple de matrices (D, N) tels que :

- D est diagonalisable et N est nilpotente.
- $A = D + N$.
- $DN = ND$.

Corollaire 17. Si A vérifie les hypothèse précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$, avec $m = \min(k, l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de N.

Exemple 18. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente d'indice q. Alors, [ROM21] p. 765

- $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$.
- La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Application 19. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est.

Exemple 20. On a [GOU21] p. 209

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 10e^2-6e^3 \\ -6e^2+3e^3 & -3e^2+4e^3 & 9e^2-6e^3 \\ -7e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 11e^2-6e^3 \end{pmatrix}$$

III - Étude de l'exponentielle de matrices

1. Dérivabilité, différentiabilité

Proposition 21. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto Ae^{tA}$. p. 195

Proposition 22 (Logarithme matriciel)**.** exp est différentiable en 0 et sa différentielle est I_n ; c'est un difféomorphisme local sur un voisinage de 0. Plus précisément, si $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|||H||| \leq 1$, alors [C-G] p. 384

$$\exp^{-1}(I_n + H) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{H^n}{n}$$

On note alors $\ln(H) = \exp^{-1}(H)$.

Théorème 23. exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec, pour toutes matrices $A, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: [ROM21] p. 762

$$\mathrm{d}\exp_A(H) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\substack{i,j \in [\![0,n-1]\!] \\ i+j=n-1}} A^i H A^j \right)$$

2. Image directe

a. Image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Exemple 24. [C-G] p. 387

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{2ik\pi} = e^0 = 1$$

En particulier, exp n'est pas injective pour $n \geq 1$.

Lemme 25. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$. [I-P] p. 396

Théorème 26. $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 27. $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Application 28. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. [ROM21] p. 770

b. Image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple 29. [C-G] p. 387

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp(0) = I_2$$

En particulier, exp n'est pas injective pour $n \geq 2$.

Proposition 30. En fait,

$$\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\}$$

Exemple 31. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de l'exponentielle réelle.

c. Images de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$

Lemme 32. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, [I-P] p. 182

$$|||M||| = \rho(M)$$

où ρ est l'application qui a une matrice y associe son rayon spectral.

[DEV] **Théorème 33.** L'application $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Remarque 34. On a le même résultat pour $\exp : \mathscr{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C})$. [C-G] p. 385

Application 35. On a des homéomorphismes :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \sim \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ et } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \sim \mathscr{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

d. Image du cône nilpotent $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$

Notation 36. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices nilpotentes et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) - I_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unipotentes. [ROM21] p. 766

Proposition 37. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Alors $e^A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et $\ln(e^{tA}) = tA$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 38. L'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le logarithme matriciel défini à la Proposition 22.

IV - Applications

1. Équations différentielles

Théorème 39 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy [GOU20] p. 376

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Proposition 40. Une équation différentielle linéaire homogène $Y' = AY$ (où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est constante en t) a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA}y_0$.

Exemple 41. Les solutions de

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

sont les

$$t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

2. Équations matricielles

[I-P] p. 177

Lemme 42. Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$.

[DEV]

Application 43 (Équation de Sylvester)**.** Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
`http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/`.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
`https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites`.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html`.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html`.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
`https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html`.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html`.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
`https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie`.