153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

I - Spectre d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Valeurs propres, vecteurs propres

[GOU21] p. 171

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On dit que λ est **valeur propre** de u si $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non injective.

— Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

— $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

— L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u. On le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque 2. — 0 est valeur propre de u si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.

— On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.

— Les sous-espaces E_λ sont stables par u pour toute valeur propre λ.

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1.

Théorème 4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

[ROM21] p. 604

Théorème 5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a alors

$$\mathrm{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Contre-exemple 6. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = X^2$, on a $A^2 = -I_2$ et $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

2. Polynôme caractéristique

Proposition 7. En notant $\chi_u = \det(X \operatorname{id}_E - u)$, p. 644

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

Définition 8. Le polynôme χ_u précédent est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Remarque 9. On peut définir la même notion pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ces deux notions coïncidant bien si A est la matrice de u dans une base quelconque de E.

Exemple 10. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^2 - \operatorname{trace}(A)X + \det(A)$.

Proposition 11. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u. Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in [\![1, \alpha]\!]$$

Proposition 12. [GOU21] p. 172

(i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

(ii) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors, $a_0 = \det(A)$ et $a_{n-1} = \operatorname{trace}(A)$ (à un signe près).

Lemme 13 (Déterminant circulant)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors p. 153

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

[DEV] **Application 14** (Suite de polygones)**.** Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. [I-P] p. 389

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0.

3. Polynôme minimal

Lemme 15. (i) $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[u]$ non réduit au polynôme nul. [ROM21] p. 604

(ii) $\text{Ann}(u)$ est le noyau de $P \mapsto P(u)$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[u]$.

(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

Définition 16. On appelle **idéal annulateur** de u l'idéal $\text{Ann}(u)$. Le polynôme unitaire générateur est noté π_u et est appelé **polynôme minimal** de u.

Remarque 17. — π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u.

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E, on a $\text{Ann}(u) = \text{Ann}(A)$ et $\pi_u = \pi_A$.

Exemple 18. Un endomorphisme est nilpotent d'indice q si et seulement si son polynôme minimal est X^q.

Proposition 19. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme $u_{|F} : F \to F$ divise π_u.

Proposition 20. (i) Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.

(ii) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u.

Remarque 21. π_u et χ_u partagent dont les mêmes racines. [GOU21] p. 186

Théorème 22 (Cayley-Hamilton)**.** [ROM21] p. 607

$$\pi_u \mid \chi_u$$

Corollaire 23.

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

II - Localisation

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Disques de Gerschgörin

p. 650

Notation 24. On note :

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et $L = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \{L_i + |a_{i,i}|\}$.
- Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,j}|$ et $C = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \{C_j + |a_{j,j}|\}$.

Théorème 25 (Gerschgörin-Hadamard). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$.

[FGN2] p. 189

Remarque 26. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq L_i\}$$

Les disques de cette réunion sont appelés disques de Gerschgörin.

[ROM21] p. 672

Exemple 27. Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\mathrm{Sp}(A(a,b)) = \left\{ a + 2b\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \mid k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Exemple 28. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\mathrm{Sp}({}^tAA) = \left\{ 4\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \mid k \in [\![0,n-1]\!] \right\}$$

p. 651

Corollaire 29. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, on a

$$\lambda \leq \min(L, C)$$

Corollaire 30. On suppose A à diagonale strictement dominante (ie. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$). Alors, A est inversible.

Théorème 31 (Ostrowski)**.** Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}$$

Remarque 32. C'est une généralisation du Théorème 25 : pour $\alpha = 1$, on retrouve l'énoncé correspondant.

Corollaire 33. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda|^2 \leq (L_i + |a_{i,i}|)(C_i + |a_{i,i}|)$$

2. Utilisation du rayon spectral

Notation 34. À toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$, on associe la norme matricielle

$$|\!|\!|.|\!|\!| : M \mapsto \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

Définition 35. Le **rayon spectral** de A, noté $\rho(A)$ est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Théorème 36. On a

$$|\!|\!|A|\!|\!|_2 = \sqrt{|\!|\!|A^* A|\!|\!|_2} = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

où $|\!|\!|.|\!|\!|_2$ est la norme matricielle associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$ et A^* est la trans-conjuguée de A.

Théorème 37. (i) On a $\rho(A) \leq |||A|||$ pour toute norme matricielle $|||.|||$ induite par une norme vectorielle.

(ii) $\rho(A) = \inf_{|||.||| \in \mathcal{N}} |||A|||$ où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble de toutes les normes matricielles induites par une norme vectorielle.

[DEV]

Théorème 38 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $f \in \mathscr{E}$ un endomorphisme tel que son polynôme minimal π_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que : [GOU21] p. 203

— $f = d + n$.

— d est diagonalisable et n est nilpotent.

— $d \circ n = n \circ d$.

Corollaire 39 (Théorème de Gelfand)**.** Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, [ROM21] p. 660

$$\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Proposition 40. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$.

(ii) Pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_{k+1} = Ax_k$, converge vers le vecteur nul.

(iii) $\rho(A) < 1$.

(iv) Il existe au moins une norme matricielle $|||.|||$ induite par une norme vectorielle telle que $|||A||| < 1$.

III - Approximation

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 41. On suppose que la valeur propre de A de module maximum est unique. On la note λ_1. Elle est alors réelle est simple, l'espace propre associé est une droite vectorielle et on a [ROM19-2] p. 210

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$$

On suppose pour la suite que la valeur propre de A de module maximum est unique. On la note λ_1.

Notation 42. On note et on définit :

— $E_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_n)$ et $F_1 = \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$.

— $x_0 = e_1 + f_1$ avec $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $f_1 \in F_1$.

— $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = \frac{1}{\|Ax_k\|} a_k$ avec $\|.\|$ norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

— Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $e_{1,j}$ la j-ième composante du vecteur e_1, $x_{k,j}$ celle de x_k et $(Ax_k)_j$ celle de Ax_k.

Théorème 43 (Méthode la puissance itérée)**.** On a :

(i) $\lim_{k\to+\infty} \|Ax_k\| = |\lambda_1| = \rho(A)$.

(ii) $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = v_1$ où v_1 est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ_1.

(iii) $\lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} = \text{signe}(\lambda_1) v_1$.

(iv) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, tel que $e_{1,j} \neq 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(Ax_k)_j}{x_{k,j}} = \lambda_1$$

Remarque 44. — Si A est inversible, la méthode précédente appliquée à A^{-1} permet de calculer la valeur propre de plus petit module de A (quand cette dernière est unique).

— En notant e_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 de norme euclidienne égale à 1, les valeurs propres de la matrice $B = A - \lambda_1 e_1 {}^t e_1$ sont $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On pourra alors appliquer la méthode à B.

Annexes

[I-P]
p. 389

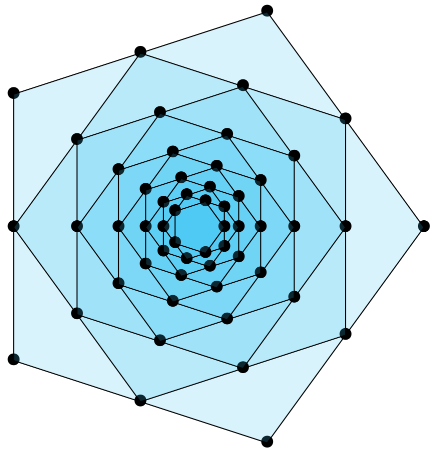

Figure 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Oraux X-ENS Mathématiques **[FGN2]**

Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2.* 2e éd. Cassini, 16 mars 2021.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Analyse matricielle **[ROM19-2]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus.* 2e éd. EDP Sciences, 7 nov. 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1101/9782759824199/analyse-matricielle-cours-et-exercices-resolus.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.