Autour de la compacité

En utilisant la compacité, on montre diverses propriétés des espaces métriques et des espaces vectoriels normés, notamment de dimension finie.

Proposition 1. Soient (E, d_E), (F, d_f) deux espaces métriques et $f : E \to F$ continue. Si E est compact, alors $f(E)$ est compact dans F.

Démonstration. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(E)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = f(y_n)$. E est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} x$ où $x \in E$. Par continuité,

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(x) \in f(E)$$

$f(E)$ est ainsi séquentiellement compact, donc est compact. □

Proposition 2. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subseteq E$ est compacte, alors A est fermée et bornée.

Démonstration.

— Fermée : Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $a \in E$. Par compacité, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} a'$ où $a' \in A$. Par unicité de la limite dans un espace métrique, $a' = a \in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, A est bien fermée.

— Bornée : Soit $a \in A$. On pose $B = \{d(a, x) \mid x \in A\}$ et on suppose par l'absurde que B est non borné. Il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(a, a_n) \geq n$$

Par compacité, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $a_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \ell$ où $\ell \in A$. Par continuité,

$$d(a, a_{\varphi(n)}) \longrightarrow_{n\to+\infty} d(a, \ell)$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(a, a_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$: absurde. Donc B est borné : il existe $r \geq 0$ tel que $d(a, x) \leq r$ pour tout $x \in A$.

□

Proposition 3. Soir E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une norme infinie $\|.\|_\infty$. Les compacts de cet espace vectoriel normé sont les parties fermées et bornées.

Démonstration. La Proposition 2 montre que les parties compactes sont fermées et bornées. Pour montrer la réciproque, prenons $r > 0$. Notons que l'intervalle $[-r, r]$ est compact : si (a_k) est une suite d'éléments de $[-r, r]$, on peut extraire une sous-suite monotone et bornée qui est alors convergente dans $[-r, r]$ car $[-r, r]$ est fermé. Le théorème de Tykhonov nous dit que le produit $[-r, r]^n$ est alors compact.

Posons

$$\varphi : \begin{array}{ccc} ([-r,r]^n, \|.\|_\infty) & \to & (E, \|.\|_\infty) \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \end{array}$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E associée à la norme infinie $\|.\|_\infty$. Alors, par la Proposition 1, $\varphi([-r,r]^n) = \overline{B}(0,r)$ est compact.

Soit maintenant A une partie fermée bornée de E. Alors il existe $r > 0$ tel que $A \subseteq \overline{B}(0,r)$. Donc, si (a_n) est une suite d'éléments de A, par compacité de $\overline{B}(0,r)$, on a l'existence d'une sous-suite convergente vers $a \in \overline{B}(0,r)$. Comme A est fermée, $a \in A$. A est ainsi séquentiellement compacte, donc est compacte. □

Théorème 4. Un espace vectoriel normé E est de dimension finie $n \geq 1$ si et seulement si toutes ses normes sont équivalentes.

Démonstration.

— $\underline{\Longleftarrow}$: Soit $\|.\|$ une norme sur E et soit φ une forme linéaire quelconque sur E. On définit la norme suivante sur E :

$$\|.\|_\varphi : x \mapsto |\varphi(x)| + \|x\|$$

Alors, pour tout $x \in E$, $|\varphi(x)| = \|x\|_\varphi - \|x\| \leq \|x\|_\varphi$: φ est continue pour $\|.\|_\varphi$ donc pour $\|.\|$ aussi par équivalence des normes.

Supposons par l'absurde E de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de vecteurs linéairement indépendantes. On pose $V = \mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient W un supplémentaire de V dans E et $p : E \to V$ la projection sur V parallèlement à W. On définit ψ une forme linéaire sur V par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(e_n) = n\|e_n\|$. Alors, $\phi = \psi \circ p$ est une forme linéaire sur E qui n'est pas continue. En effet :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} = +\infty$$

C'est absurde.

— $\underline{\Longrightarrow}$: Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Si $\|.\|$ est une norme sur E, on a :

$$\|x\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right)}_{=\alpha} \|x\|_\infty$$

Donc $\|.\|_\infty$ est plus fine que $\|.\|$.

L'application $\|.\| : (E, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}^+, |.|)$ est continue car lipschitzienne ($\forall x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$), donc est bornée et atteint ses bornes sur la sphère $S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$ (qui est fermée bornée, donc compacte par la Proposition 3). On note $x_0 \in E$ ce minimum :

$$\forall x \in E \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1, \text{ on a } \|x\| \geq \underbrace{\|x_0\|}_{=\beta}$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \beta \text{ ie. } \|x\| \geq \beta \|x\|_\infty$$

Donc $\|.\|$ est plus fine que $\|.\|_\infty$: les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Comme la relation d'équivalence sur les normes d'un espace vectoriel est transitive, on en déduit que toutes les normes sur E sont équivalentes.

□

Corollaire 5. (i) Les parties compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.

(ii) Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

(iii) Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

(iv) Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(E, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Alors,

$$\mathscr{L}(E,F) = L(E,F)$$

ie. toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration. (i) C'est une conséquence directe de la Proposition 3 et du Théorème 4.

(ii) Soit (x_n) une suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Notons que :

— (x_n) **est bornée.** En effet, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > q \geq N$, $\|x_p - x_q\| < 1$. Donc, $\forall p \geq N$, $\|x_p\| < 1 + \|x_N\|$. Ainsi,

$$M = \max(\|x_0\|, \dots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\|)$$

majore la suite (x_n).

— (x_n) **admet au plus une valeur d'adhérence, et si c'est le cas, elle converge vers cette valeur d'adhérence.** En effet, si (x_n) converge, alors sa limite est son unique valeur d'adhérence. Soit maintenant x une valeur d'adhérence de (x_n). Soit $\epsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N,\ \|x_p - x_q\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $q \geq N$. Par définition de la valeur d'adhérence,

$$\exists p \geq q \text{ tel que } \|x_p - x\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc :

$$\|x_q - x\| \leq \|x_p - x_q\| + \|x_p - x\| < \epsilon$$

ce que l'on voulait.

Supposons E de dimension finie. Par le premier point, (x_n) est bornée, donc incluse dans une boule fermée B, qui est compacte par le Point (i), donc elle admet une valeur d'adhérence $\ell \in B$. Par le second point, (x_n) converge vers ℓ.

(iii) Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit (x_n) une suite de F qui converge vers $x \in E$. Notons que (x_n) **est de Cauchy.** En effet, soit $\epsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N,\ \|x_p - x_q\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Soient $p > q \geq N$.

$$\begin{aligned}\|x_p - x_q\| &\leq \|x_p - x\| + \|x - x_q\| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy de F, qui est de dimension finie, donc complet par le Point (ii). (x_n) converge donc dans F, et par unicité de la limite, on a $x \in F$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, F est bien fermé dans E.

(iv) Soit $f \in L(E, F)$. On définit une norme sur E par

$$\|.\| : x \longmapsto \|x\|_E + \|f(x)\|_F$$

Or, $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_F &= \|x\|_E - \|x\| \\ &\leq \|x\|_E - M\|x\|_E\end{aligned}$$

où $M > 0$, par le Théorème 4. Ainsi,

$$\|f(x)\|_F = (1 - M)\|x\|_E$$

f est une application linéaire bornée, donc continue.

$\square$

Application 6. $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$.

Démonstration. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathbb{C}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc $\mathbb{C}[M]$ l'est aussi et est en particulier fermé par le Corollaire 5 Point (ii).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} \in \mathbb{C}[M]$ de sorte que $P_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \exp(M)$. Comme $\mathbb{C}[M]$ est fermé, on en déduit que $\exp(M) \in \mathbb{C}[M]$. Donc $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. $\square$

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation [DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête [GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.