Trigonalisation simultanée

Nous montrons le théorème de trigonalisation simultanée grâce à l'utilisation des applications transposées (et donc, de la dualité).

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$.

[GOU21] p. 176

Lemme 1. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par g. Alors,

$$\chi_{g_{|F}} \mid \chi_g$$

Démonstration. On note m la dimension de F. Considérons G, un supplémentaire de F dans E. Soient $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de F et de G. Alors, la matrice de g dans la base de E constituée de l'union disjointe de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$, qui est la matrice de l'endomorphisme induit $g_{|F}$. On constate clairement que $\chi_{g_{|F}} = \chi_A \mid \chi_M = \chi_g$. □

Lemme 2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par g. Alors, $g_{|F}$ est trigonalisable.

Démonstration. g est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de sa restriction à F l'est aussi au vu du Lemme 1. □

Lemme 3. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g sont trigonalisables et commutent. Alors, f et g ont un vecteur propre commun.

Démonstration. f est trigonalisable, donc f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ (cf. première colonne de la matrice de f dans une base de trigonalisation). Le sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est alors stable par g :

$$\forall x \in E_\lambda,\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(g(x)) = g((f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x))$$

car f, g et $\lambda\,\mathrm{id}_E$ commutent. Ainsi,

$$\forall x \in E_\lambda,\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(g(x)) = 0$$

Par le Lemme 2, la restriction de g à E_λ est trigonalisable. Donc, $g_{|E_\lambda}$ admet un vecteur propre $x \in E_\lambda$ qui est, par construction, un vecteur propre commun à f et g. □

Théorème 4 (Trigonalisation simultanée)**.** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g sont trigonalisables et commutent. Alors, il existe une base de trigonalisation commune de f et g.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur n.

— Si $n = 1$: c'est évident.

— Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\begin{aligned}({}^t f \circ {}^t g)(\varphi) &= {}^t f(\varphi \circ g) \\ &= \varphi \circ g \circ f \\ &= \varphi \circ f \circ g \\ &= ({}^t g \circ {}^t f)(\varphi)\end{aligned}$$

ie. ${}^t f {}^t g = {}^t f {}^t g$. De plus, ${}^t f$ et ${}^t g$ sont trigonalisables (car possèdent les mêmes polynômes caractéristiques que f et g). Par le Lemme 3 appliqué à ${}^t f$ et ${}^t g$, il existe un vecteur propre $\psi \in E^*$ commun à ces deux endomorphismes. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\psi)$ est ainsi stable par ${}^t f$ et ${}^t g$. Notons

$$H = \mathrm{Vect}(\psi)^\circ = \{x \in E \mid \psi(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(\psi)$$

c'est un hyperplan de E (donc de dimension $n - 1$), qui est de plus stable par f et g. En effet, en notant $\lambda \in \mathbb{K}$ la valeur propre de f associée à ψ, on a :

$$\forall x \in H, \psi(f(x)) = {}^t f(\psi)(x) = \lambda \psi(x) = 0$$

et un même calcul montre la stabilité par g. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux endomorphismes induits $f_{|H}$ et $g_{|H}$, on obtient une base $\mathscr{B}_H$ de H de cotrigonalisation pour $f_{|H}$ et $g_{|H}$. On la complète en une base quelconque $\mathscr{B}$ de E, dans laquelle on obtient

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \mathrm{Mat}(f_{|H}, \mathscr{B}_H) & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} & & & * \\ & \mathrm{Mat}(g_{|H}, \mathscr{B}_H) & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{Mat}(f_{|H}, \mathscr{B}_H)$ et $\mathrm{Mat}(g_{|H}, \mathscr{B}_H)$ sont triangulaires supérieures d'ordre $n - 1$.

□

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.