Transformée de Fourier d'une gaussienne

On calcule la transformée de Fourier d'une fonction de type gaussienne $x \mapsto e^{-ax^2}$ à l'aide du théorème intégral de Cauchy.

[AMR08] p. 156

Proposition 1. On définit $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x$$

et en écrivant

$$ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + i\frac{x\xi}{a}\right) = a\left(\left(x + i\frac{\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$$

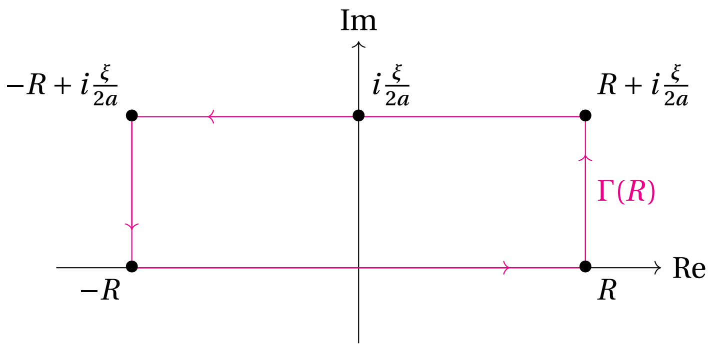
on en déduit que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} \, \mathrm{d}x \tag{$*$}$$

On va considérer la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{-az^2} \end{array}$$

Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on note $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R, R, R + i\frac{\xi}{2a}, -R + i\frac{\xi}{2a}$ parcouru dans le sens direct :



On a,

$$\underbrace{\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z}_{=I(R)} = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z}_{=I_1(R)} + \underbrace{\int_{R}^{R+i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z}_{=I_2(R)} + \underbrace{\int_{R+i\frac{\xi}{2a}}^{-R+i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z}_{=I_3(R)} + \underbrace{\int_{-R+i\frac{\xi}{2a}}^{-R} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z}_{=I_4(R)}$$

Nous allons traiter les intégrales séparément.

— Pour $I_1(R)$: On a affaire à une intégrale sur l'axe réel. Or, on connait la valeur de l'intégrale de Gauss :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$$
Donc en faisant le changement de variable $y = \sqrt{a}x$, on obtient :
$$\sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
D'où :
$$I_1(R) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_2(R)$: On a :
$$\begin{aligned}&\forall z \in \left[R, R + i\frac{\xi}{2a}\right], z = R + it \text{ avec } t \in \left[0, \frac{\xi}{2a}\right]\\ \implies &\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t\end{aligned}$$
D'où :
$$I_2(R) = i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$
On en déduit,
$$\begin{aligned}|I_2(R)| &\leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(R+it)^2}\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(R^2-t^2)}\right|\underbrace{\left|e^{i2aRt}\right|}_{=1}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\,\mathrm{d}t\\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$
quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_3(R)$: On a :
$$\begin{aligned}&\forall z \in \left[R + i\frac{\xi}{2a}, -R + i\frac{\xi}{2a}\right], z = t + i\frac{\xi}{2a} \text{ avec } t \in [R, -R]\\ \implies &\mathrm{d}z = \mathrm{d}t\end{aligned}$$
D'où :
$$I_3(R) = \int_R^{-R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = -e^{\frac{\xi^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

qui est une intégrale généralisée absolument convergente. Ainsi par $(*)$,

$$I_3(R) \longrightarrow -e^{\frac{\xi^2}{4a}}\widehat{\gamma_a}(\xi)$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_4(R)$: Ce cas-ci se traite exactement comme $I_2(R)$. On a :

$$\begin{aligned} &\forall z \in \left[-R + i\frac{\xi}{2a}, -R\right],\, z = -R + it \text{ avec } t \in \left[\frac{\xi}{2a}, 0\right] \\ &\implies \mathrm{d}z = i\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où :

$$I_4(R) = i\int_{\frac{\xi}{2a}}^0 e^{-a(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t = -i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit,

$$|I_4(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(-R+it)^2}\right|\mathrm{d}t = e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I(R)$: La fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe et le contour $\Gamma(R)$ est fermé. Donc $I(R) = 0$ en vertu du théorème intégral de Cauchy.

En passant à la limite, on obtient ainsi :

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}}\widehat{\gamma_a}(\xi) + 0 \iff \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

□

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html`.