Théorème de Weierstrass (par la convolution)

On montre le théorème de Weierstrass par la convolution (sans forcément développer toute la théorie derrière, ce qui peut être utile dans certaines leçons).

[GOU20] p. 304

Notation 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t \text{ et } p_n : t \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

Lemme 2. La suite (p_n) vérifie :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t) = 1$.

(iii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t|>\alpha} p_n(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

Autrement dit, (p_n) est une **approximation positive de l'identité**.

Démonstration. Notons tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$ car $a_n \geq 0$ et $(1-t^2)^n \geq 0$ pour tout $t \in [-1,1]$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a_n} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t = 1$.

(iii) Soit $\alpha > 0$.

— Si $\alpha < 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^{1} (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t \leq \frac{2}{a_n}(1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$$

et comme $|1-\alpha^2| < 1$, on a $\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t) \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0$.

— Si $\alpha \geq 1$:

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

□

Théorème 3 (Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ continue. Montrons que $(f * p_n)$ converge uniformément vers f. Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème de Heine f est uniformément continue sur son support, donc l'est aussi sur $\mathbb{R}$ entier :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

De plus, f est bornée et atteint ses bornes (donc écrire $\|f\|_\infty$ a du sens). On peut appliquer le Lemme 2 Point (iii) :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \int_{|t|\geq\eta} p_n(t)\,\mathrm{d}t < \epsilon$$

Donc, toujours avec le Lemme 2, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f * p_n(x) - f(x)| &\overset{(ii)}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t)-f(x))p_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|(f(x-t)-f(x))p_n(t)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}} \left|f(x-t)-f(x)\right| p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\geq\eta} \left|f(x-t)-f(x)\right| p_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\eta}^{\eta} \left|f(x-t)-f(x)\right| p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\|f\|_\infty\epsilon + \epsilon\int_{-\eta}^{\eta} p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(i)}{\leq} 2\|f\|_\infty\epsilon + \epsilon\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (2\|f\|_\infty + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est à support dans $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et montrons que pour tout $f * p_n$ est une fonction polynômiale.

$$\forall x \in I,\ (f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

Notons que $\forall x, t \in I$, $|x-t| \leq 1$, donc

$$p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} \overset{\text{développement}}{=} \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

où $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, q_k est une fonction polynômiale. En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\forall x \in I,\ (f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

qui est bien une fonction polynômiale sur I.

Soient maintenant $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On considère $[c, d]$ un intervalle plus grand avec $c < a$ et $b < d$ et on prolonge f par :

- Une fonction affine sur $[c, a]$ qui vaut 0 en c et $f(a)$ en a.
- Une fonction affine sur $[b, d]$ qui vaut 0 en d et $f(b)$ en b.

Et on peut encore prolonger cette fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier en une fonction $\widetilde{f}$ telle que $\widetilde{f} = 0$ pour tout $x \notin [c, d]$. On a donc $\widetilde{f} \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant avoir besoin du changement de variable suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & [c,d] \\ x & \mapsto & (d-c)x + \frac{c+d}{2} \end{array}$$

Comme $\widetilde{f} \circ \varphi$ est continue, à support dans I, on peut maintenant affirmer que $\widetilde{f} \circ \varphi$ est limite uniforme d'une suite de polynômes (ρ_n). Donc $\widetilde{f}$ est limite uniforme de la suite $(\rho_n \circ \varphi^{-1})$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \circ \varphi^{-1}$ est bien une fonction polynômiale car φ (donc φ^{-1} aussi) est affine. A fortiori, $f = \widetilde{f}_{|[a,b]}$ est aussi limite de fonctions polynômiales sur $[a,b]$. $\square$

La fin de la preuve me semble mieux écrite dans **[I-P]**.

Bibliographie

Les maths en tête [GOU20]

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques [I-P]

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.