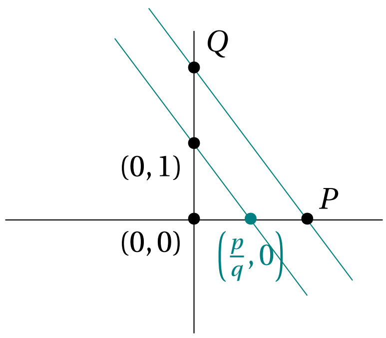
# Théorème de Wantzel

*Une application sympathique de la théorie des corps en géométrie. Les arguments sont assez simples et donnent lieu à de jolies applications.*

**Notation 1.** On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des nombres constructibles. Tout au long du développement, on se permettra de confondre points et coordonnées.

**Lemme 2.** $\mathbb{E}$ contient le corps $\mathbb{Q}$. **[GOZ]** p. 49

*Démonstration.* Tout élément $z \in \mathbb{Z}$ est constructible. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$. Les points $P = (p, 0)$ et $Q = (0, q)$ sont constructibles. On considère la droite $(d)$, parallèle à $(PQ)$ passant par $(0, 1)$. Cette droite est constructible, et son point d'intersection avec la droite passant par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ est $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ par le théorème de Thalès.

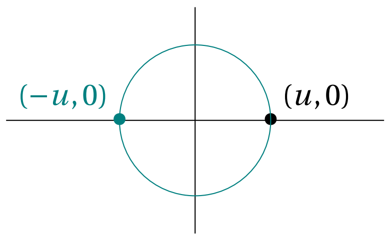



Donc $\frac{p}{q} \in \mathbb{E}$. Comme $0 \in \mathbb{E}$, on a bien $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E}$. □

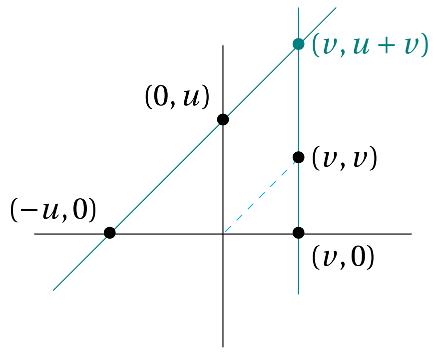
**Lemme 3.** $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

*Démonstration.* Soient $u, v \in \mathbb{E}$. Commençons par montrer que $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

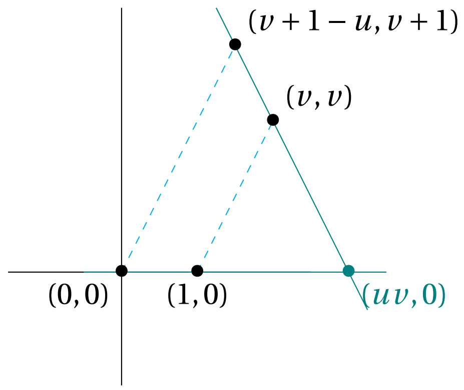
— Le point $(u, 0)$ est constructible donc son symétrique $(-u, 0)$ l'est aussi. Donc $-u \in \mathbb{E}$.



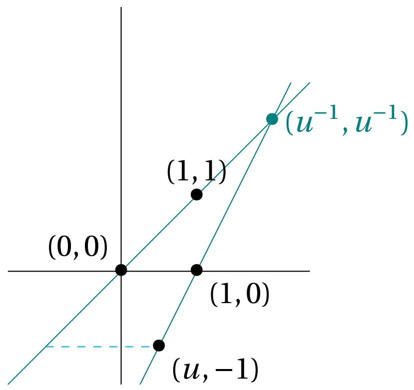

— La droite passant par les points $(0, u)$ et $(-u, 0)$ et la droite passant par les points $(v, 0)$ et $(v, v)$ ont pour point d'intersection $(v, u + v)$ (par le théorème de Thalès). Donc $u + v \in \mathbb{E}$.



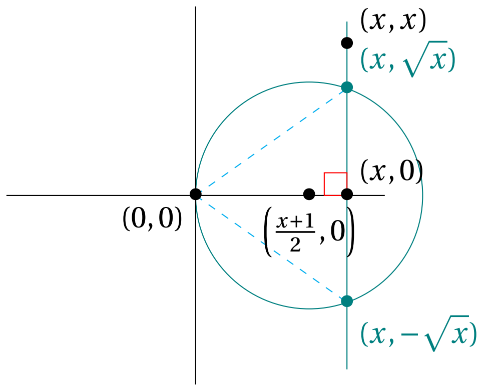

— D'après ce qui précède, $v+1$ et $v+1-u$ appartiennent à $\mathbb{E}$. La droite passant par les points $(v+1-u, v+1)$ et $(u,v)$ et la droite passant par les points $(0,0)$ et $(1,0)$ ont pour point d'intersection $(uv,0)$ (par le théorème de Thalès). Donc $uv \in \mathbb{E}$.




— On suppose $u \neq 0$. La droite passant par les points $(1,0)$ et $(u,-1)$ et la droite passant par les points $(0,0)$ et $(1,1)$ ont pour point d'intersection $(u^{-1}, u^{-1})$ (par le théorème de Thalès). Donc $u^{-1} \in \mathbb{E}$.




Ainsi, $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{Q}$ par le Lemme 2. Maintenant, soit $x \in \mathbb{E}$ avec $x > 0$. Comme $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, on a $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{E}$. Le cercle de centre $\left(\frac{x+1}{2}, 0\right)$ passant par $(0,0)$ et la droite passant par les points $(x,0)$ et $(x,x)$ ont pour point d'intersection $(x,\sqrt{x})$ et $(x,-\sqrt{x})$ par le théorème de Pythagore. Donc $\sqrt{x} \in \mathbb{E}$.




□

**Théorème 4** (Wantzel)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha \in \mathbb{E}$ si et seulement s'il existe une suite finie $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $L_0 = \mathbb{Q}$.

(ii) $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $L_{i+1}$ est une extension quadratique (de degré 2) de $L_i$.

(iii) $\alpha \in L_p$.

*Démonstration.* On suppose $\alpha$ constructible. Alors, il existe un point $M$ tel que $\alpha$ est l'abscisse de $M$. $M$ s'obtient à l'aide d'un nombre fini de constructions de points $M_1, \dots, M_m$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note $(x_i, y_i)$ les coordonnées de $M_i$. De ce fait, on a une tour d'extension **[ULM18]** p. 103

$$\underbrace{K_0}_{=\mathbb{Q}} \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$$

avec $\alpha \in K_m$ et pour tout $0 \in [\![1, m-1]\!]$, $K_{i+1} = K_i(x_i, y_i)$. Soit $i \in [\![1, m-1]\!]$. Montrons que $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$. On a différents cas possibles :

— $M_i$ est l'intersection de deux droites passant par des nombres constructibles de $K_i$. Alors, les coordonnées $(x_i, y_i)$ de $M_i$ sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. Donc, $x_i, y_i \in K_i$ et ainsi, $[K_{i+1} : K_i] = 1$.

— $M_i$ est l'intersection d'une droite et d'un cercle passant par des points dont les coordonnées sont des nombres constructibles de $K_i$ et de rayon un nombre constructible de $K_i$. Alors, les coordonnées $(x_i, y_i)$ de $M_i$ sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (x - a')^2 + (y - b')^2 = c' \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. Raisonnons selon la nullité de $a$.

  - Si $a \neq 0$, la première équation donne

$$x = -\frac{by + c}{a}$$

    et en réinjectant dans la deuxième équation, on obtient que $y_i$ est racine d'un polynôme de degré 2. Ainsi, $[K_i(y_i) : K_i] \leq 2$. Puisque $x_i = -\frac{by_i + c}{a} \in K_i(y_i)$, on a bien $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$.
  - Si $a = 0$, alors $y_i = \frac{c}{b} \in K_i$ (on ne peut pas avoir $b = 0$ dans ce cas). Or, cette fois-ci c'est $x_i$ qui est racine d'un polynôme de degré 2. On peut conclure de la même manière que ci-dessus.
- $M_i$ est l'intersection de deux cercles passant par des points dont les coordonnées sont des nombres constructibles de $K_i$ et de rayon un nombre constructible de $K_i$. Alors, les coordonnées $(x_i, y_i)$ de $M_i$ sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = c \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c' \end{cases}$$

  avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. On soustrait la deuxième équation à la première, pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{cases} -2(a-a')x - 2(b-b')y = c - c' - (a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2) \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c' \end{cases}$$

  ce qui nous ramène au cas précédent.

Il suffit alors d'extraire de la suite $(K_0, \dots, K_m)$ une sous-suite $(L_0, \dots, L_p)$ strictement croissante (au sens de l'inclusion) en ne conservant dans la suite initiale que les corps extension quadratique du précédent (avec $L_0 = K_0$ et $L_p = K_n$). On obtient une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$ (par le Lemme 3) qui remplit les trois conditions annoncées.

Réciproquement, supposons l'existence d'une suite $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ répondant aux trois conditions de l'énoncé. Montrons par récurrence que

$$\forall j \in [\![0, p]\!], \, L_j \subseteq \mathbb{E}$$

- Initialisation : $L_0 = \mathbb{Q}$ : cela résulte du Lemme 2.
- Hérédité : Supposons $L_j \subseteq \mathbb{E}$ pour $j \in [\![0, p-1]\!]$. Soit $x \in L_{j+1}$. Comme, par hypothèse,

$$[L_{j+1} : L_j] = 2$$

  la famille $(1, x, x^2)$ est $L_j$-liée :

$$\exists a, b, c \in L_j \text{ non tous nuls tels que } ax^2 + bx + c = 0$$

  - Si $a = 0$, alors, $x = -\frac{c}{b} \in L_j$. Donc $x \in \mathbb{E}$.
  - Si $a \neq 0$, alors, $x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$. Donc, comme $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée (cf. Lemme 3), $x \in \mathbb{E}$.

Ainsi, $L_{j+1} \subseteq \mathbb{E}$. En conclusion, $L_p \subseteq \mathbb{E}$, donc $\alpha$ est constructible.

$\square$

La réciproque et la conclusion du sens direct du théorème sont mieux rédigées dans **[GOZ]**, à mon avis.

**Corollaire 5.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est constructible, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^e$.

[GOZ] p. 52

*Démonstration.* Soit $\alpha \in \mathbb{E}$. D'après le théorème précédent, il existe une suite finie $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $L_0 = \mathbb{Q}$.

(ii) $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $L_{i+1}$ est une extension quadratique (de degré 2) de $L_i$.

(iii) $\alpha \in L_p$.

Par le théorème de la base télescopique,

$$[L_p : \mathbb{Q}] = 2^p$$

et par ce même théorème,

$$[L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$$

et en particulier, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de $2^p$ : ce qu'on voulait. $\square$

**Application 6** (Duplication du cube)**.** Soit un cube de volume $\mathcal{V}$ dont on suppose son arête $a$ constructible. Il est impossible de dessiner, à la règle et au compas, l'arête d'un cube de volume $2\mathcal{V}$.

*Démonstration.* On a $\mathcal{V} = a^3$ et donc $2\mathcal{V} = 2a^3$. L'arête d'un cube est la racine cubique de son volume. Il faut donc construire le nombre

$$\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Comme $a$ est constructible, ceci revient à construire le nombre

$$\alpha = \sqrt[3]{2}$$

Le polynôme $P = X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (par le critère d'Eisenstein) et annule $\alpha$ : c'est son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$. On a ainsi

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

donc $\alpha$ n'est pas constructible par le Corollaire 5. $\square$

# Bibliographie


**Théorie de Galois** **[GOZ]**

Ivan Gozard. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1.* 2e éd. Ellipses, 1er avr. 2009. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html.

**Anneaux, corps, résultants** **[ULM18]**

Felix Ulmer. *Anneaux, corps, résultants. Algèbre pour L3/M1/agrégation.* Ellipses, 28 août 2018. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/9852-20186-anneaux-corps-resultants-algebre-pour-l3-m1-agregation-9782340025752.html.