# Théorème de Fejér

*Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér, qui assure la convergence de la série de Fourier d'une fonction au sens de Cesàro.*

**Lemme 1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $T$-périodique. Alors $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Le théorème de Heine implique la continuité uniforme de $f$ sur $[-T, 2T]$, ce qui s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [-T, 2T],\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{$*$}$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit le $\eta > 0$ correspondant donné par $(*)$, que l'on peut supposer strictement inférieur à $T$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \eta$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + kT \in [0, T]$. Alors,

$$y' = y + kT \in [x' - \eta, x' + \eta] \subseteq [-T, 2T]$$

Comme $|x' - y'| < \eta$, on en déduit

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \epsilon$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Notation 2.** On note $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et, pour toute fonction $f$ continue et $2\pi$-périodique, $c_n(f)$ son $n$-ième coefficient de Fourier. [GOU21] p. 306

**Théorème 3** (Fejér). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $2\pi$-périodique. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ le $n$-ième terme de sa série de Fourier et

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

la suite des moyennes de Cesàro correspondante. Alors $(C_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* On commence par noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ et $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$ les noyaux de Dirichlet et de Fejér. Comme, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi} e_n(t) \, \mathrm{d}t = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_0(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

et donc,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \, \mathrm{d}t \right) = 1 \tag{$*$}$$

Calculons le noyau de Dirichlet. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} \left(e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(2N+1)i\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} \\
&= \frac{2i \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
NF_{N-1} &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+\frac{1}{2})x}\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{iNx-1}}{e^{ix} - 1}\right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} 2i \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iNx}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \,\mathrm{d}t\right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \,\mathrm{d}t = f * D_n$$

donc $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) \,\mathrm{d}t = f * F_n = F_n * f$ par commutativité du produit de convolution.

Soit $\epsilon > 0$. Le Lemme 1 assure l'existence de $\eta \in ]0, \pi[$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

De plus, $|f|$ est continue sur tous les compacts de la forme $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, on peut donc la majorer par un réel $M > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) \,\mathrm{d}t - f(x) \times \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \,\mathrm{d}t}_{=1 \text{ par } (*)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} 2M F_n(t) \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \epsilon F_n(t) \,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \,\mathrm{d}t + \epsilon
\end{aligned}$$

Or, $(**)$ montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-\pi, \pi] \text{ tel que } |x| > \eta, \text{ on a } |F_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2}$$

donc $(F_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]$. Il existe ainsi $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \,\mathrm{d}t < \epsilon$$

de sorte que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - C_n(x)| \leq \left(\frac{M}{\pi} + 1\right)\epsilon$$

D'où le résultat. □

Je préfère la preuve de **[GOU21]**, qui est plus “clés en main”. Il est possible de passer les calculs des noyaux de Dirichlet et de Fejér dans un premier temps, puis de les montrer à la fin selon le temps restant.

# Bibliographie

**Les maths en tête** **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.