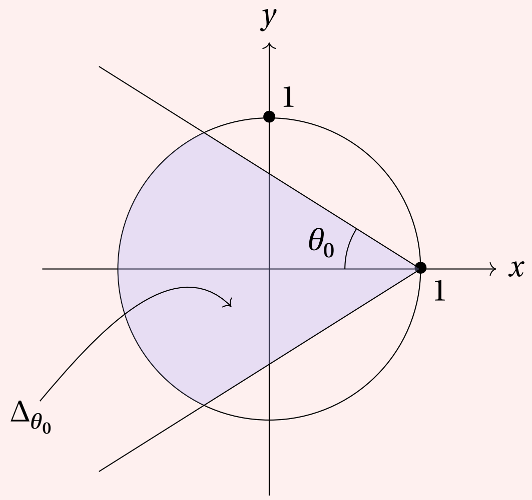
Théorème d'Abel angulaire

On montre le théorème d'Abel "angulaire", qui permet d'intervertir certaines sommes et limites, et on l'applique justement au calcul de deux sommes.

[GOU20] p. 263

Théorème 1 (Abel angulaire)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.



Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$. On chercher à majorer $|f(z) - S|$; on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $\forall n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$. Soit $z \in D \setminus \{0\}$. $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

Donc en faisant $N \to +\infty$:

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \qquad (*)$$

Soit $\epsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| < \epsilon$. D'après $(*)$, $\forall z \in D$,

$$\begin{aligned}|f(z) - S| &\leq |z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + \epsilon|z-1|\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}|z|^n\right) \\ &\leq |z-1|\left(\sum_{n=0}^{N}|R_n|\right) + \epsilon\frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (**)\end{aligned}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$ de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$. Notons avant toute chose que $|z-1| = \rho$. Cherchons maintenant des conditions sur z pour majorer les deux termes :

— On a :

$$\begin{aligned}|z|^2 &= (1-\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \\ &= 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) \\ &= 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2\end{aligned}$$

En supposant $\rho \leq \cos(\theta_0)$, cela permet de majorer le deuxième terme de $(**)$:

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \\ &= \frac{2}{\cos(\theta_0)}\end{aligned}$$

— Soit $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \epsilon$. Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| \leq \alpha$, alors on peut majorer le premier terme de $(**)$:

$$|z-1|\left(\sum_{n=0}^{N}|R_n|\right) \leq \alpha\left(\sum_{n=0}^{N}|R_n|\right) < \epsilon$$

Donc, en faisant $z \longrightarrow 1$ tel que $z \in \Delta_{\theta_0}$ (on aura bien $\rho = |z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos(\theta_0)\}$), et en injectant les deux majorations trouvées dans $(**)$:

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon\frac{2}{\cos(\theta_0)} = \epsilon\left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$$

d'où le résultat. □

Application 2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^n \\
&\overset{x>0}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sqrt{x}^{2n+1} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}) \\
&= \arctan(1) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

La preuve de l'application précédente écrite dans **[GOU20]** est un peu lacunaire. Merci aux personnes qui l'ont signalée et corrigée.

Application 3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Démonstration. Toujours en appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \ln(1+x) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.