Nombres de Bell

En utilisant les propriétés des séries entières, nous calculons le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

[GOU21] p. 314

Théorème 1 (Nombres de Bell)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. Par convention on pose $B_0 = 1$. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Démonstration. Notons que clairement $B_1 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimons B_{n+1} en fonction des termes précédents. Pour tout $k \leq n$, on note E_k l'ensemble des partitions P de $[\![1, n+1]\!]$ tel que la partie de P qui contient l'entier $n+1$ est de taille $k+1$. Choisir une partition dans E_k, c'est choisir k entiers de $[\![1, n]\!]$ (ceux de l'ensemble qui contient $n+1$ dans la partition), puis construire une partition des $n-k$ éléments restants. Donc $|E_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$.

Comme $E_0, \dots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$, on obtient :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \tag{$*$}$$

À toute partition P de $[\![1, n]\!]$, on peut associer une permutation $\sigma_P \in S_n$, qui est le produit des cycles de supports les éléments de P. On construit ainsi une application $P \mapsto \sigma_P$ injective. D'où :

$$B_n \leq |S_n| = n!$$

On en déduit en particulier que $\frac{B_n}{n!} \leq 1$. En vertu du lemme d'Abel, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1. On peut donc définir

$$B : \begin{array}{ccc}]-R, R[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \end{array}$$

et en dérivant, $\forall x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \end{aligned}$$

On reconnaît là le produit de Cauchy suivant :

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = B(x) e^x$$

Reste à résoudre cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$B(x) = \lambda e^{e^x}$$

Or, $B(0) = B_0 = 1 = \lambda e^1$. D'où $B(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$.

La série entière définissant l'exponentielle a un rayon de convergence infini. On peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(nz)^k}{n!k!}}_{u_{n,k}(z)}$$

On va appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue à $u_{n,k}(z)$ (où $z \in \mathbb{C}$ est fixé) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}(z)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n|z|}}{n!} = e^{e^{|z|}} < +\infty$$

Donc on peut intervertir les signes de sommations. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{e} e^{e^x} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

□

La partie sur le dénombrement (au début de la preuve) est un peu technique. N'hésitez pas à passer du temps dessus et à y réfléchir en faisant des exemples.

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.