

# Méthode de Newton

On démontre ici la méthode de Newton qui permet de trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle.

**Théorème 1** (Méthode de Newton). Soit  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement croissante sur  $[c, d]$ . On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car  $f' > 0$ ). Alors :

- (i)  $\exists! a \in [c, d]$  tel que  $f(a) = 0$ .
- (ii)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $I = [a - \alpha, a + \alpha]$  est stable par  $\varphi$ .
- (iii) La suite  $(x_n)$  des itérés (définie par récurrence par  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ ) converge quadratiquement vers  $a$  pour tout  $x_0 \in I$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in [c, d]$ . Comme  $f(a) = 0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Or, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne l'existence d'un  $z \in ]a, x[$  tel que

$$\begin{aligned} f(a) &= f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{1}{2}f''(z)(a - x)^2 \\ \Leftrightarrow f(a) - f(x) - f'(x)(a - x) &= \frac{1}{2}f''(z)(a - x)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x - a)^2 \quad (*)$$

Soit  $C = \frac{\max_{x \in [c, d]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [c, d]} |f'(x)|}$ . Par (\*), on a :

$$\forall x \in [c, d], |\varphi(x) - a| \leq C|x - a|^2$$

Soit maintenant  $\alpha > 0$  suffisamment petit pour que  $C\alpha < 1$  et que  $I = [a - \alpha, a + \alpha] \subseteq [c, d]$ . Alors :

$$x \in I \implies |\varphi(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$$

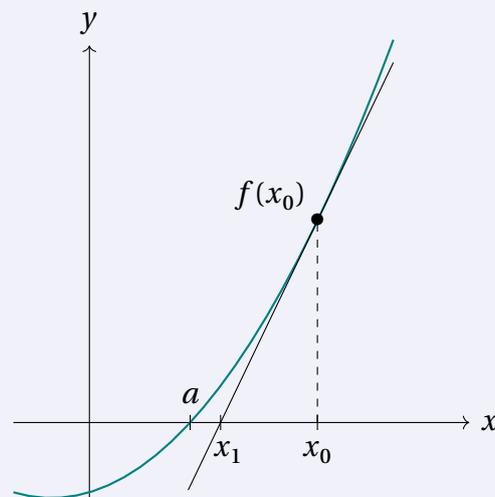
(la première inégalité se voit en faisant un dessin, et la seconde vient du fait que  $C\alpha < 1$ ). D'où

$\varphi(I) \subseteq I$ . Et si  $x_0 \in I$ , on a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$  et

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - a| &= |\varphi(x_n) - a| \\ &\leq C|x_n - a|^2 \end{aligned}$$

D'où  $C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$  où  $C\alpha < 1$ . On a donc bien convergence quadratique de la suite  $(x_n)$  vers le réel  $a$ .  $\square$

**Remarque 2.** On suppose que l'on connaisse une approximation grossière du point que l'on nomme  $x_0$ .



L'idée de la méthode est de remplacer la courbe représentative de  $f$  par sa tangente au point  $x_0$  :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'abscisse  $x_1$  du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

d'où le fait d'itérer la fonction  $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

**Corollaire 3.** En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus  $f$  strictement convexe sur  $[c, d]$ , le résultat du théorème est vrai sur  $I = [a, d]$ . De plus :

- (i)  $(x_n)$  est strictement décroissante (ou constante).
- (ii)  $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$  pour  $x_0 > a$ .

**Démonstration.** La dérivée  $f'$  est strictement croissante (car  $f$  est strictement convexe) sur  $]c, d[$ . Ainsi, soit  $x \in [a, d]$ . Si  $x = a$ , on a  $\varphi(x) = x$ , et la suite  $(x_n)$  est alors constante. Supposons

[DEM]  
p. 100

[ROU]  
p. 152

maintenant  $x > a$ . On a :

$$\varphi(x) = x - \frac{\overbrace{f(x)}^{>0}}{\underbrace{f'(x)}_{>0}} < x$$

Et par (\*) (de la démonstration précédente),  $\exists z \in ]a, x[$  :

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x - a)^2 > 0 \iff \varphi(x) < a$$

Ainsi,  $I = [a, d]$  est stable par  $\varphi$  et pour  $x_0 \in ]a, d]$ , on a  $x_n \in ]a, d]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et la suite  $(x_n)$  est strictement décroissante. La suite  $(x_n)$  admet donc une limite  $\ell$  vérifiant  $\varphi(\ell) = \ell \iff f(\ell) = 0$  ie.  $\ell = a$  par unicité. Comme dans le théorème précédent, la convergence est quadratique :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin, si  $x_0 \in ]a, d]$ , on a comme dans (\*) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a \text{ et } \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}$$

où  $z_n \in ]a, x_n[$  (d'après la démarche effectuée pour obtenir (\*)). On fait tendre  $n$  vers l'infini et la fraction de droite tend vers  $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$  ; d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 4.* L'ajout de l'hypothèse de convexité à la méthode de Newton, nous permet de nous affranchir de l'intervalle  $I$  tout en gardant la même vitesse de convergence.

# Bibliographie

## **Analyse numérique et équations différentielles**

[DEM]

Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. 4<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.

<https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp>.

## **Petit guide de calcul différentiel**

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.