

# Formule sommatoire de Poisson

On démontre la formule sommatoire de Poisson en utilisant principalement la théorie des séries de Fourier.

**Théorème 1** (Formule sommatoire de Poisson). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

où  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$ .

[GOU20]  
p. 284

*Démonstration.* Comme  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , il existe  $M > 0$  et  $A > 0$  tel que

$$\forall |x| > A, |f(x)| \leq \frac{M}{x^2} \quad (*)$$

Soit  $K > 0$ . On a  $\forall x \in [-K, K], \forall n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|n| > K + A$  :

$$|f(x+n)| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-|x|)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

Donc  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}$  donc converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . On note  $F$  la limite simple en question.

On montre de même que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}$ . Donc par le théorème de dérivation des suites de fonctions,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment de  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier (la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales).

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^N f(x+1+n) &= \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+n) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} F(x+1) = F(x) \end{aligned}$$

ie.  $F$  est 1-périodique. On peut calculer ses coefficients de Fourier.  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi n t} dt$$

Par convergence uniforme sur un segment, on peut échanger somme et intégrale :

$$c_n(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

Or, la transformée de Fourier d'une fonction  $L_1$  est convergente. On peut donc écrire :

$$c_n(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt = \hat{f}(2\pi n)$$

Comme  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , sa série de Fourier converge uniformément vers  $F$ . D'où le résultat.  $\square$

**Application 2** (Identité de Jacobi).

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha > 0$ . On définit  $G_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$  et on connaît sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

Soit  $s > 0$ . Appliquons le Théorème 1 à la fonction  $G_{\pi s}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi s(x+n)^2} &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2\pi n)^2}{4\pi s}} e^{2i\pi n x} \\ \xRightarrow{x=0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi s n^2} &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \end{aligned}$$

$\square$

# Bibliographie

Les maths en tête

[GOU20]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.