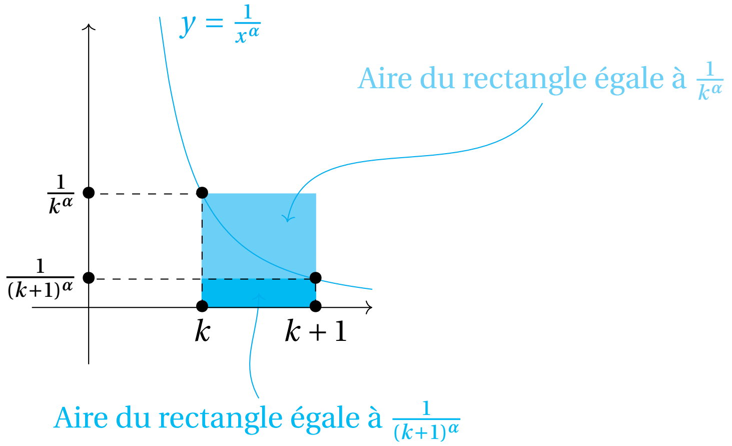
Développement asymptotique de la série harmonique

On effectue un développement asymptotique à l'ordre 2 *de la série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$.

Lemme 1. Soit $\alpha > 1$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a [I-P] p. 380

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Démonstration. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}^{\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, nous allons faire une comparaison série / intégrale.



On a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

D'où :

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

Soit $N \geq 2$. Pour tout $n \in [\![2, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
& \int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \\
\iff & \left[\frac{-1}{\alpha - 1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{-1}{\alpha - 1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{n-1}^{N} \\
\iff & \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right)
\end{aligned}$$

La suite $\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \right)$ est donc convergente, car elle est croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \right)$. Lorsque N tend vers $+\infty$, on a donc

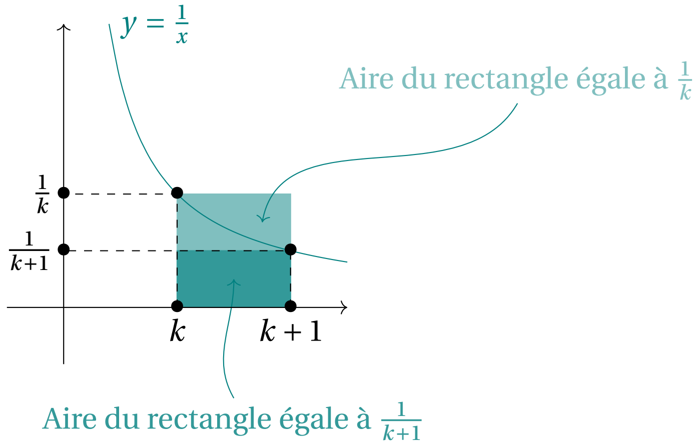
$$\frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \right)$$

Or, comme $n^{\alpha-1} \sim (n-1)^{\alpha-1}$ quand n tend vers $+\infty$, on en conclut l'équivalent annoncé. $\square$

Théorème 2 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Démonstration. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, cela invite à faire une comparaison série / intégrale.



On a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$$

Traitons les deux morceaux séparément.

— $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$ par l'inégalité de droite. Donc, en sommant entre 1 et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \leq H_n$$

— $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ par l'inégalité de gauche avec un changement de variable. Donc, en sommant entre 2 et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(n)$$

et en ajoutant 1 :

$$H_n \leq \ln(n) + 1$$

On peut tout regrouper pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

et donc, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n \sim \ln(n)$$

Pour la suite, on pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et pour tout $n \geq 2$, $v_n = H_{n-1} - \ln(n)$. On a :

— $\forall n \geq 2$, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ et converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

— $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \in]-1, +\infty[$.

— $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Posons maintenant

$$\forall n \geq 1,\ t_n = u_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma$$

Nous allons utiliser le lien entre séries et suites : cherchons un équivalente de la suite $(t_n - t_{n-1})$ pour obtenir un équivalent de la somme partielle de la série de terme général $(t_n - t_{n-1})$ qui n'est autre que la suite (t_n). À l'aide du développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 on obtient

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= \ln(n-1) - \ln(n) + \frac{1}{n} \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \\ &\sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la série de terme général $t_k - t_{k-1}$ converge. Le théorème de sommation des équivalents donne l'équivalence des restes. Or, un équivalent du reste de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est donné par le Lemme 1 et vaut $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k - t_{k-1} = -t_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$

D'où $t_n \sim \frac{1}{2n}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose alors $\forall n \geq 1$, $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ et on procède de manière similaire pour obtenir, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k - w_{k-1} = -w_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{6n^2} = \frac{1}{12n^2}$$

d'où le résultat. □

Bibliographie

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.