Décomposition polaire

On montre que toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $M = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et que l'application $(O, S) \mapsto M$ est un homéomorphisme.

Lemme 1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. Par le théorème spectral, on peut écrire $S = {}^tP\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Si on suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on a $\forall x \neq 0$,

$$ {}^txSx = {}^t(Px)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(Px) > 0 \text{ car } \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) $$

d'où le résultat.

Réciproquement, on suppose $\forall x \neq 0$, ${}^txSx > 0$. Avec $x = {}^tPe_1$ (où e_1 désigne le vecteur dont la première coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles),

$$ {}^txSx = {}^t(Px)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(Px) = {}^te_1De_1 = \lambda_1 > 0 $$

Et on peut faire de même pour montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$. □

Lemme 2. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de constater que

$$ \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} \cap \left(\bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^txMx \geq 0\} \right) $$

qui est une intersection de fermés (par image réciproque). Maintenant, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors M est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles (par le théorème spectral). Mais comme $\det(M) \neq 0$, toutes les valeurs propres de M sont strictement positives. Donc par le Lemme 1, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. □

Théorème 3 (Décomposition polaire)**.** L'application [C-G] p. 376

$$ \mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array} $$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Montrer qu'une application est un homéomorphisme se fait en 4 étapes : on montre qu'elle est continue, injective, surjective, et que la réciproque est elle aussi continue.

— <u>L'application est bien définie et continue</u> : Si $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $OS \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus, μ est continue en tant que restriction de la multiplication matricielle.

— L'application est surjective : Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $x \neq 0$, on a

$$^t x(^t MM)x = {}^t(Mx)(Mx) = \|Mx\|_2^2 > 0$$

En particulier, $^t MM \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $^t MM = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$. On pose alors

$$D = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right) \text{ et } S = PDP^{-1}$$

de sorte que $S^2 = {}^t MM$. Mais de plus,

$$^t S = {}^t P^{-1}\,{}^t D\,{}^t P = S \implies S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

et par le Lemme 1,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sqrt{\lambda_i} > 0 \implies S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

On pose donc $O = MS^{-1}$ (ie. $M = OS$), et on a

$$^t OO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^t S^{-1}\,{}^t MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n \implies O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$$

Donc $\mu(O, S) = M$ et μ est surjective.

— L'application est injective : Soit $M = OS \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (avec O et S comme précédemment). Soit $M = O'S'$ une autre décomposition polaire de M. Alors il vient,

$$S^2 = {}^t MM = {}^t(O'S')O'S' = {}^t S'\,{}^t O'O'S' = S'^2$$

Soit Q un polynôme tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (les polynômes d'interpolation de Lagrange conviennent parfaitement). Alors,

$$S = PD\,{}^t P = PQ\left(D^2\right){}^t P = Q\left(PD^2\,{}^t P\right) = Q\left({}^t MM\right) = Q\left(S^2\right) = Q\left(S'^2\right)$$

Mais S' commute avec S'^2, donc avec $S = Q\left(S'^2\right)$. En particulier, S et S' sont codiagonalisables, il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu'_1, \dots, \mu'_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$S = P_0 \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P_0^{-1} \text{ et } S' = P_0 \mathrm{Diag}\left(\mu'_1, \dots, \mu'_n\right) P_0^{-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
S^2 = S'^2 &\implies P_0 \mathrm{Diag}\left(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2\right) P_0^{-1} = P_0 \mathrm{Diag}\left(\mu_1'^2, \dots, \mu_n'^2\right) P_0^{-1} \\
&\implies \mu_i^2 = \mu_i'^2 \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \\
&\implies \mu_i = \mu'_i \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \text{ car } \forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i > 0 \\
&\implies S = S'
\end{aligned}$$

Ainsi, $O = MS^{-1} = MS'^{-1} = O'$. Donc μ est injective.

— L'application inverse est continue : Soit $(M_p) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que la suite $\left(\mu^{-1}\left(M_p\right)\right) = (O_p, S_p)$ converge vers $\mu^{-1}(M) = (O, S)$. Comme $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(O_{\varphi(p)})$ converge vers une valeur d'adhérence $\overline{O} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, la suite $(S_{\varphi(p)})$ converge vers $\overline{S} = \overline{O}^{-1} M$.

Mais, $\overline{S} = \overline{O}^{-1} M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$. Donc par le Lemme 1,

$$\overline{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$$

et par le Lemme 2,

$$\overline{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

On a $M = \overline{OS}$, d'où, par unicité de la décomposition polaire, $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$.

□

Remarque 4. La preuve vaut encore dans le cas complexe (pour le groupe unitaire et les matrices hermitiennes).

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
`http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/`.