

Caractérisation réelle de la fonction Γ

On montre que la fonction Γ d'Euler est la seule fonction log-convexe sur \mathbb{R}^+ prenant la valeur 1 en 1 et vérifiant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 1. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie :

[ROM19-1]
p. 364

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- (ii) $\Gamma(1) = 1$.
- (iii) Γ est log-convexe sur \mathbb{R}_*^+ .

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

(ii) Comme $t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} dt}_{=\Gamma(1)} = 1$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lambda \in]0, 1[$. On applique l'inégalité de Hölder en posant $\lambda = \frac{1}{p}$ et $1 - \lambda = \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda x} t^{(1-\lambda)y} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{x-1})^{\frac{1}{p}} (e^{-t} t^{y-1})^{\frac{1}{q}} dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Donc $\ln \circ \Gamma$ vérifie bien l'inégalité de convexité sur \mathbb{R}_*^+ et ainsi, Γ est log-convexe. □

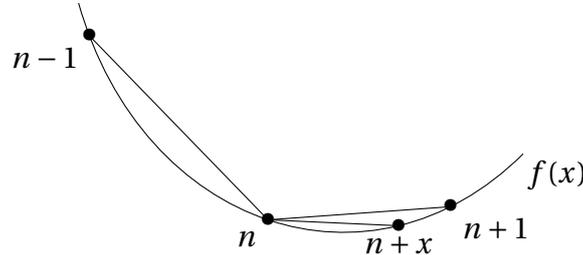
Exercice 2 (Bohr-Mollerup). Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Exercice 1. Alors $f = \Gamma$.

Démonstration. Par récurrence, on a d'après le Point (i) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1], f(x+n) = (x+n-1) \dots (x+1)x f(x) \quad (*)$$

Donc les valeurs prises par f sur \mathbb{R}_*^+ sont entièrement déterminées par ses valeurs prises sur $]0, 1]$. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier $\forall x \in]0, 1], f(x) = \Gamma(x)$.

Soient donc $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on applique le lemme des trois pentes à la fonction convexe $\ln \circ f$ (d'après le Point (iii)) appliqué aux points $n-1, n, n+x$ et $n+1$:



$$\frac{(\ln \circ f)(n) - (\ln \circ f)(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - (\ln \circ f)(n)}{n+x - n} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+1) - (\ln \circ f)(n)}{n+1 - n}$$

Mais, d'après (*) et le Point (ii), on a $f(n) = (n-1)!$. D'où :

$$\begin{aligned} \ln(n-1) &\leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!)}{x} \leq \ln(n) \\ \Rightarrow \ln((n-1)^x) &\leq (\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!) \leq \ln(n^x) \\ \Rightarrow \ln((n-1)^x (n-1)!) &\leq (\ln \circ f)(n+x) \leq \ln(n^x (n-1)!) \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction \ln , cela donne :

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x (n-1)!$$

Et en appliquant (*), on obtient :

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x+n-1) \dots (x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1) \dots (x+1)x}$$

En ne considérant que la première inégalité, on peut remplacer n par $n+1$ (car les deux inégalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$):

$$\frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} \leq f(x)$$

Or, $\frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1) \dots (x+1)x} = \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} \frac{x+n}{n}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} &\leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} \frac{x+n}{n} \\ \Rightarrow f(x) \frac{n}{x+n} &\leq \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} \leq f(x) \\ \Rightarrow f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} \end{aligned}$$

en faisant $n \rightarrow +\infty$ dans la deuxième implication. Comme Γ vérifie le Point (i), le Point (ii), et le

Point (iii); le raisonnement précédent est a fortiori vrai aussi pour Γ . Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x} = f(x)$$

ie. f et Γ coïncident bien sur $]0, 1]$. □

Exercice 3. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à \mathbb{R}_*^+ entier.

La preuve, telle qu'elle est écrite ici, est issue d'un livre de Walter Rudin. Elle est également disponible (sous une forme un peu différente) comme l'indique la référence, dans **[ROM19-1]**.